Problème de Mathématiques

Référence pp2133 — Version du 27 novembre 2025

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

On note φ, la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur J.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur J ?
3. Démontrer que la fonction φ est continue sur J et qu'elle tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$. (On donnera la valeur de ℓ.)
4. On pose

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

4. a. Quel est le signe de a ?
4. b. Démontrer que

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution ❀ Série de fonctions

1. Pour tout $x \in J$, il est clair que la suite de terme général

$$\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$$

tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge donc.

On a démontré que la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait simplement sur l'intervalle J.

2. Chaque fonction $|f_n|$ est clairement décroissante sur J, donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in J} \left|f_n(x)\right| = \left|f_n(1)\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/2}}$$

donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente et par conséquent la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Puisqu'on a prouvé la convergence simple à l'aide du Critère spécial des séries alternées, on sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in J, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(x)\right|$$

et comme la fonction $|f_{n+1}|$ est décroissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in J, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

On a trouvé un majorant de la valeur absolue du reste qui est indépendant de $x \in J$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

❧ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur J, on en déduit que la somme φ est continue sur J.

❧ Toutes les fonctions f_n tendent vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$ avec

$$\ell_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \ell_n = 0.$$

Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$, on déduit du Théorème de la double limite que φ tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

4. a. On peut à nouveau appliquer le Critère spécial des séries alternées. Ce théorème nous dit en particulier que la somme de la série (= le reste d'ordre 0) est du signe du premier terme, donc

$$a < 0.$$

4. b. On remarque que $\ell = f_0(x)$ pour tout $x \in J$ et par conséquent

$$\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \Big[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}}\Big].$$

Version élémentaire : on fait apparaître la quantité conjuguée pour simplifier les racines carrées. Pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} &= \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx})}\\ &\leqslant \frac{1}{2n^{3/2}x^{3/2}}\end{aligned}$$

donc, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in J$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{nx}}-\frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right]\right| \leqslant \frac{\zeta(3/2)}{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}$$

ce qui prouve bien que

$$\varphi(x)-\ell-\frac{a}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^{3/2}}\Big).$$

Version savante : on pose

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad g(u)=\frac{1}{\sqrt{1+u}}.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad g'(u)=\frac{-1}{2(1+u)^{3/2}}.$$

En particulier, $\|g'\|_\infty = 1/2$ et d'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction g est $1/2$-lipschitzienne sur $[0,+\infty[$.

On remarque alors que

$$\frac{1}{\sqrt{nx}}-\frac{1}{\sqrt{1+nx}}=\frac{1}{\sqrt{nx}}\cdot\big(g(0)-g(1/nx)\big)$$

et on retrouve ainsi que

$$\forall\, x \in J,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{nx}}-\frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{nx}.$$

On peut alors conclure comme plus haut.