Problème de Mathématiques

Référence pp1222 — Version du 6 décembre 2025

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de termes généraux strictement positifs, telles que

$$a_n \sim b_n$$

lorsque n tend vers $+\infty$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini et on note f, la somme de cette série entière :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, somme de la série entière $\sum b_n z^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_n = b_n(1+\gamma_n).$$

3. Soit $m\in\mathbb{N}$.

3. a. Justifier l'existence de

$$\delta_m = \sup_{n\geqslant m} |\gamma_n|.$$

3. b. Démontrer que

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n| b_n t^n$$

pour tout $t>0$.

4. Démontrer que $f(t)\sim g(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

5. **Application.** On pose

$$h(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{t^n}{n!}.$$

5. a. Quel est l'ensemble de définition de h ?

5. b. Déterminer un équivalent de $h(t)$ pour $t\to+\infty$.

6. **Application.** On considère l'équation différentielle suivante.

$$ty''(t)+(1-t)y'(t)=1 \tag{E}$$

6. a. Démontrer que l'équation (E) admet une, et une seule, solution z développable en série entière en $t=0$ et telle que $z(0)=0$ et $z'(0)=1$.

6. b. Donner une expression simple de $z'(t)$ pour $t>0$.

6. c. Calculer un équivalent de $z(t)$ pour $t\to+\infty$.

Solution ❀ Équivalent de la somme d'une série entière

1. Comme le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est infini, alors la série numérique $\sum a_n t^n$ converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or $b_n t^n \sim a_n t^n$, donc la série numérique $\sum b_n t^n$ converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$ et par conséquent la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{a_n}{b_n} - 1.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n(1+\gamma_n)$$

et comme $a_n \sim b_n$, alors le quotient a_n/b_n tend vers 1, donc la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

3. a. Comme la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est bornée et par conséquent δ_m est bien défini pour tout $m \in \mathbb{N}$ (axiome de la borne supérieure).

3. b. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $t > 0$.

❧ Comme tous les b_n sont strictement positifs et que la série $\sum b_n t^n$ est absolument convergente, alors

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad 0 < b_p t^p < \sum_{n=p}^{+\infty} b_n t^n < \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = g(t).$$

En particulier, pour $p = m+1$,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| b_n t^n \leqslant \frac{g(t)}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| b_n t^n. \tag{1}$$

❧ Par définition de δ_m,

$$\forall\, n \geqslant m, \quad 0 \leqslant |\gamma_n| b_n t^n \leqslant \delta_m b_n t^n.$$

Cela montre en particulier que

$$|\gamma_n| b_n t^n = \mathcal{O}(b_n t^n),$$

donc la série $\sum |\gamma_n| b_n t^n$ converge absolument. On peut donc sommer l'encadrement précédent :

$$0 \leqslant \sum_{n=m+1}^{+\infty} |\gamma_n| b_n t^n \leqslant \delta_m \sum_{n=m+1}^{+\infty} b_n t^n \leqslant \delta_m g(t). \tag{2}$$

❧ En sommant les encadrements (1) et (2) et en divisant par $g(t) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{g(t)} \sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n| b_n t^n \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| b_n t^n. \tag{3}$$

❧ Par définition de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| = \frac{\left| f(t) - g(t) \right|}{g(t)} &= \frac{1}{g(t)} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n b_n t^n \right| \\ &\leqslant \frac{1}{g(t)} \sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n| b_n t^n \end{aligned}$$

puisque $t > 0$ et $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors de (3) que

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| b_n t^n.$$

4. Fixons $\varepsilon > 0$.

❧ Comme la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe un rang $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant m, \quad |\gamma_n| \leqslant \varepsilon$$

et donc tel que $\delta_m \leqslant \varepsilon$.

❧ L'entier m étant fixé, il est clair que

$$\frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n$$

tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (en tant que $\mathcal{O}(1/t)$). Il existe donc $A > 0$ tel que

$$\forall\, t \geqslant A, \quad \frac{1}{b_{m+1}t^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|b_n t^n \leqslant \varepsilon.$$

❧ L'encadrement du **[3.b.]** montre alors que

$$\forall\, t \geqslant A, \quad \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

autrement dit que

$$\frac{f(t)}{g(t)} - 1$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, ce qui signifie que

$$f(t) \sim g(t)$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

5. a. On sait que la suite de terme général

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}$$

converge vers e. Comme la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la série

$$\sum\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\frac{t^n}{n!}$$

converge absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

5. b. Par **[4.]**,

$$h(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e\,t^n}{n!} = e^{t+1}$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

6. a. Si l'équation (E) admet une solution z développable en série entière au voisinage de 0, alors il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

La condition initiale $\big(z(0), z'(0)\big) = (0, 1)$ impose alors $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

Les fonctions développables en série entière sont indéfiniment dérivables terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad z'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$$
$$tz'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n$$
$$tz''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}t^n$$

et donc, pour tout $-r < t < r$,

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big[(n+1)^2 a_{n+1} - n a_n\big]t^n = 1.$$

Cette égalité entre deux fonctions développables en série entière ayant lieu sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$ avec $r > 0$, on peut en déduire que

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n$$

par unicité du développement en série entière.

La condition $a_0 = 0$ démontre alors qu'il existe *au plus une* solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0 et qui vérifie la condition initiale imposée.

REMARQUE.— La condition $a_1 = 1$ ne résulte donc pas du choix de la condition initiale, mais de l'hypothèse que la solution étudiée est développable en série entière.

❧ Réciproquement, on devine facilement (au brouillon) et on vérifie encore plus facilement par récurrence (au propre) que le terme général de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la donnée de $a_1 = 1$ et de la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n$$

s'exprime par

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{n\, n!}.$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est infini (par comparaison avec la série exponentielle) et les calculs précédents montre que la somme de cette série entière, définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n\, n!}$$

est l'unique solution développable en série entière de (E) telle que

$$z(0) = 0 \quad \text{et} \quad z'(0) = 1.$$

6. b. La somme d'une série entière est dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence. Cet intervalle étant ici égal à $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \quad z'(t) = \frac{1}{t}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

REMARQUE.— On pouvait aussi calculer $z'(t)$ en remarquant que (E) est une équation différentielle linéaire du *premier* ordre en z'. Mais il est alors périlleux de justifier le choix de la constante d'intégration, puisqu'on résout l'équation pour $t \in]0, +\infty[$ et que la condition imposée est donnée pour $t = 0$...

6. c. Il est clair que

$$a_n \sim \frac{1}{(n+1)!}.$$

On déduit de **[4.]** que

$$z(t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{e^t - 1}{t}$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$z(t) \sim \frac{e^t}{t}.$$

REMARQUE.— On peut se passer de la théorie des séries entières pour déterminer cet équivalent. D'après la question précédente et le théorème fondamental,

$$\begin{aligned} \forall\, t \geqslant 1, \quad z(t) &= z(1) + \int_1^t \frac{e^u - 1}{u}\, du \\ &= z(1) - \ln t + \int_1^t \frac{e^u}{u}\, du. \end{aligned}$$

On intègre alors deux fois par parties :

$$z(t) = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} - 2\int_1^t \frac{e^u}{u^3}\,du + \mathcal{O}(\ell n\,t).$$

Mais

$$\forall\, 1 \leqslant u \leqslant t, \quad 0 \leqslant \frac{e^u}{u^3} \leqslant \frac{e^t}{u^3}$$

donc

$$\int_1^t \frac{e^u}{u^3}\,du = \mathcal{O}\Big(\frac{e^t}{t^2}\Big)$$

et par suite

$$z(t) = \frac{e^t}{t} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^t}{t^2}\Big) \sim \frac{e^t}{t}$$

lorsque t tend vers $+\infty$.