Problème de Mathématiques

Référence pp1224 — Version du 6 décembre 2025

On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,t)=e^{x\sin t}$$

et par

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\int_0^{\pi/2}f(x,t)\,dt.$$

On notera $I=[0,\frac{\pi}{2}]$ et $I_0=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Justifier par une figure (*sans aucun calcul*) l'encadrement suivant.

$$\forall\,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \frac{2t}{\pi}\leqslant\sin t\leqslant t$$

2. Démontrer que g est une fonction croissante et convexe sur $\mathbb{R}$. Préciser les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Tracer l'allure du graphe de g.

4. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et est une solution de l'équation différentielle suivante.

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad xy''(x)+y'(x)-xy(x)=1 \tag{$\star$}$$

5. a. Soit $0\leqslant t\leqslant\pi/2$. Expliciter le développement en série entière de la fonction

$$[x\mapsto f(x,t)]\,.$$

5. b. Démontrer que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On exprimera les coefficients de son développement en fonction des intégrales de Wallis :

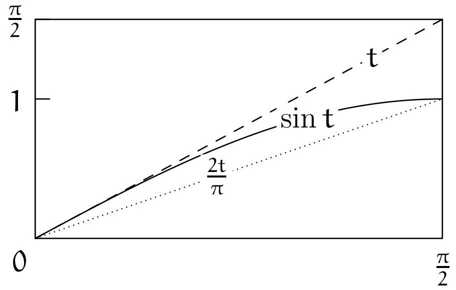
$$W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$$

(qu'on ne cherchera pas à calculer).

6. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(\star)$ qui sont développables en série entière. En déduire une relation entre W_n et W_{n+2}.

Solution ❀ Exemple de fonction développable en série entière

1.



2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur le segment I, donc intégrable sur I : la fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

❧ Soient $x \leqslant y$. On sait que $\sin t \geqslant 0$ pour tout $t \in I$, donc

$$\forall\, t \in I, \quad f(x,t) \leqslant f(y,t)$$

(par croissance de exp) et donc $g(x) \leqslant g(y)$. La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

En particulier, la fonction g admet une limite (finie ou non) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction $[u \mapsto f(u,t)]$ est convexe, car elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et sa dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,t) = e^{u \sin t} \sin^2 t$$

est positive. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\forall\, t \in I, \quad f\big((1-\lambda)x + \lambda y, t\big) \leqslant (1-\lambda) f(x,t) + \lambda f(y,t).$$

L'intégrale conserve les inégalités : en intégrant cette inégalité pour $t \in I$, on en déduit que

$$g\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda) g(x) + \lambda g(y).$$

La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

❧ On sait que $e^u \geqslant 1 + u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (convexité de exp), donc

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times I, \quad e^{x \sin t} \geqslant 1 + x \sin t.$$

En intégrant pour $t \in I$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geqslant \frac{\pi}{2} + x$$

et, par comparaison, la fonction g tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

❧ Comme g est croissante et positive, elle admet une limite positive finie au voisinage de $-\infty$. Par composition de limites, cette limite est aussi la limite de la suite $(g(-n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Considérons les fonctions φ_n définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad \varphi_n(t) = f(-n,t) = e^{-n \sin t}.$$

➙ Les fonctions φ_n sont continues sur le segment I, donc intégrables sur I et aussi intégrables sur I_0.

➙ Il est clair que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I_0 (mais pas sur I !) vers la fonction nulle.

➙ Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I_0$,

$$\big|\varphi_n(t)\big| \leqslant 1.$$

Le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et intégrable sur l'intervalle borné I_0 : la condition de domination est donc vérifiée.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite de terme général

$$g(-n) = \int_0^{\pi/2} \varphi_n(t)\, dt$$

converge vers 0.

Par conséquent, la fonction g tend vers 0 au voisinage de $-\infty$.

3. Ce qui précède donne une idée assez précise du graphe de g, mais il faut encore étudier le comportement de g au voisinage de $+\infty$: existe-t-il une branche parabolique ? une asymptote oblique ?

❧ On sait que

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \geqslant \frac{u^2}{2}$$

(tous les termes sont positifs). Par suite,

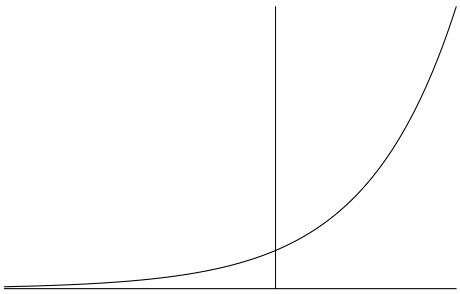
$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times I, \quad f(x,t) \geqslant \frac{x^2 \sin^2 t}{2}$$

et comme l'intégrale conserve les inégalités, on en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant \frac{x^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi x^2}{2}.$$

La graphe de g présente donc une branche parabolique d'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

❧ L'allure générale du graphe de g est donc celle du graphe de exp.



4. Nous allons appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

➞ Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

➞ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$[t \mapsto f(x,t)]\,, \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right], \quad \left[t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right]$$

sont continues sur le segment I, donc intégrables sur I.

➞ Enfin, pour tout $A > 0$, pour tout $x \in [-A, A]$ et tout $t \in I$,

$$\left|f(x,t)\right| \leqslant e^A, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^A, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^A$$

et la fonction constante $\left[t \mapsto e^A\right]$ est intégrable sur le segment I.

Par conséquent, la fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-A, A]$ et ses dérivées sont obtenues en dérivant sous le signe $\int$.

Comme $A > 0$ est arbitrairement choisi, on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin t} \sin t \, dt$$

$$\text{et} \quad g''(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin t} \sin^2 t \, dt.$$

❧ On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xg''(x) + g'(x) - xg(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t - x \cos^2 t) e^{x \sin t} \, dt$$

$$= \left[-e^{x \sin t} \cos t\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

5. a. D'après le développement en série entière de exp,

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times I, \quad e^{x \sin t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \sin^n t}{n!}.$$

5. b. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n par

$$\forall\, t \in I, \quad u_n(t) = \frac{x^n \sin^n t}{n!}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in I, \quad \left|u_n(t)\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$$

et on sait que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est une série de fonctions continues qui converge normalement sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned} g(x) = \int_0^{\pi/2} f(x,t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} u_n(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_n}{n!} x^n. \end{aligned}$$

6. Supposons que y soit une solution développable en série entière de $(\star)$: il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence. Comme $r > 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad xy(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ xy''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned} &xy''(x) + y'(x) - xy(x) \\ &\qquad = 1 = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1}\right] x^n \end{aligned}$$

pour tout $x \in \left]-r, r\right[$.

Si deux séries entières ont même somme sur un voisinage de l'origine, alors leurs coefficients sont les mêmes. Comme $r > 0$, on en déduit que

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}.$$

❧ Réciproquement, si

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$$

alors, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_{n-1} x^{n-1}} = \frac{x^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et, d'après la règle de D'Alembert, les deux séries numériques

$$\sum a_{2n} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sum a_{2n+1} x^{2n+1}$$

sont absolument convergentes. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n x^n$$

est infini et les calculs précédents montrent que, si $a_1 = 1$, la somme de cette série entière est solution de $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

❧ En conclusion, une fonction y est une solution développable en série entière de $(\star)$ si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{[(2n+1)!]^2} x^{2n+1} + a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

❧ Comme la fonction g est une solution développable en série entière de $(\star)$, ses coefficients doivent vérifier la relation de récurrence trouvée ci-dessus. Donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{W_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{W_{n-1}}{(n-1)!}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$