Problème de Mathématiques

Référence pp1608 — Version du 6 décembre 2025

---

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

1. b. Expliciter une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = T.$$

1. c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1. d. Quel est le polynôme minimal de A ?

1. e. Démontrer qu'il existe trois matrices P_1, P_2 et P_3 telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n \cdot P_1 + n2^n \cdot P_2 + n^2 2^n \cdot P_3.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n.$$

Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 2^n(a + bn + cn^2).$$

3. Soit g, une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g^{(3)}(t) = 6g''(t) - 12g'(t) + 8g(t).$$

Démontrer qu'il existe trois constantes a, b et c telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = (a + bt + ct^2)e^{2t}.$$

Solution ❀ Applications de la réduction des endomorphismes, III

1. a. Avec l'aide d'une calculatrice (ou en s'inspirant de la suite de l'énoncé !), on trouve

$$\chi_A = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3.$$

1. b. On procède par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. S'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$, alors il *faut* que

$$f(e_1) = 2\cdot e_1, \quad f(e_2) = 2\cdot e_2 + e_1, \quad f(e_3) = 2\cdot e_3 + e_2$$

et donc que

$$e_2 = (f - 2I)(e_3), \quad e_1 = (f-2I)(e_2) = (f-2I)^2(e_3).$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base, il *faut* que $e_1 \neq 0$, donc on cherche un vecteur $e_3 \notin (f-2I)^2$. Comme

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 8 & -8 & 2 \\ 16 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1, un tel vecteur existe.

En choisissant (par exemple) $e_3 = (0,0,1)$, on doit prendre $e_2 = (0,1,4)$ et $e_1 = (1,2,4)$ (c'est-à-dire les troisièmes colonnes de $(A-2I_3)^2$ et de $(A-2I_3)$).

SYNTHÈSE.— Considérons la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que cette matrice (triangulaire...) est inversible. D'après les calculs précédents,

$$f(e_2) = 2\cdot e_2 + e_1 \quad \text{et} \quad f(e_3) = 2\cdot e_3 + e_2.$$

Enfin, on vérifie facilement que $f(e_1) = 2\cdot e_1$ et par conséquent, $Q^{-1}AQ = T$.

1. c. La matrice A admet 2 pour seule valeur propre. Si elle était diagonalisable, alors il existerait une matrice inversible Q_0 telle que $Q_0^{-1}AQ_0 = \mathrm{Diag}(2,2,2)$, donc A serait égale à $Q_0(2I_3)Q_0^{-1} = 2I_3$, ce qui est évidemment faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

1. d. Comme A et T sont semblables, elles ont même polynôme minimal. Or $(T - 2I_3)$ est visiblement nilpotente d'indice 3, donc $(X-2)^3$ est le polynôme minimal de T (et donc de A).

1. e. Comme T est la somme d'une *homothétie* et d'une matrice nilpotente d'indice 3, on peut appliquer la formule du binôme :

$$T^n = 2^n I_3 + \binom{n}{1} 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \binom{n}{2} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $T^n = 2^n I_3 + n2^n T_2 + n^2 2^n T_3$ avec

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= (QTQ^{-1})^n = QT^nQ^{-1} \\ &= 2^n \cdot \underbrace{I_3}_{P_1} + n2^n \cdot \underbrace{QT_2Q^{-1}}_{P_2} + n^2 2^n \cdot \underbrace{QT_2Q^{-1}}_{P_3}. \end{aligned}$$

2. La suite vectorielle de terme général

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$$

vérifie $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après **[1.e.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n X_0 = 2^n(a + bn + cn^2)$$

en posant

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_1 X_0, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 X_0$$
$$\text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_3 X_0.$$

3. On pose comme d'habitude

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}.$$

Les trois fonctions x, y et z ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifient le système

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} &= Q^{-1} \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \\ g^{(3)}(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} A \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} \\ &= Q^{-1}AQQ^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $x' = 2x + y$, $y' = 2y + z$ et $z' = 2z$, donc il existe une constante K_3 telle que $z(t) = K_3 e^{2t}$. Comme $y'(t) - 2y(t) = K_3 e^{2t}$, alors il existe une constante K_2 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (K_2 + K_3 t)e^{2t}$$

et comme $z'(t) - z(t) = (K_2 + K_3 t)e^{2t}$, alors il existe une constante K_1 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = (K_1 + K_2 t + {}^1\!/_2 K_3 t^2)e^{2t}.$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t + {}^1\!/_2 K_3 t^2)e^{2t} \\ (K_2 + K_3 t)e^{2t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

donc $g(t) = (a + bt + ct^2)e^{2t}$ en posant

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} K_2 \\ K_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} K_3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$