Problème de Mathématiques

Référence pp1607 — Version du 6 décembre 2025

---

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -15 & 7 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

1. b. Expliciter une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = T.$$

1. c. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1. d. Pourquoi peut-on calculer T^n à l'aide de la formule du binôme ?

1. e. En déduire qu'il existe trois matrices P_1, P_2 et P_3 telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P_1 + 3^n \cdot P_2 + n3^n \cdot P_3.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 7x_{n+2} - 15x_{n+1} + 9x_n.$$

Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = a + 3^n b + n3^n c.$$

3. Soit g, une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g^{(3)}(t) = 7g''(t) - 15g'(t) + 9g(t).$$

3. a. Démontrer que les trois fonctions x, y et z définies par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifient le système suivant.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

3. b. En déduire qu'il existe trois constantes a, b et c telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = ae^t + (b+ct)e^{3t}.$$

Solution ❀ Applications de la réduction des endomorphismes, II

1. a. Avec l'aide d'une calculatrice (ou en s'inspirant de la suite de l'énoncé !), on trouve

$$\chi_A = X^3 - 7X^2 + 15X - 9 = (X-1)(X-3)^2.$$

1. b. On procède par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. S'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$, alors il *faut* que

$$f(e_1) = 1 \cdot e_1, \quad f(e_2) = 3 \cdot e_2, \quad f(e_3) = 3 \cdot e_3 + 1 \cdot e_2.$$

On en déduit que e_1 et e_2 sont des vecteurs propres de f et que

$$(f - 3\,I)^2(e_3) = (f - 3\,I)(e_2) = 0.$$

On vérifie sans peine que les sous-espaces propres Ker f et $\operatorname{Ker}(f - 3\,I)$ sont respectivement dirigés par $(1, 1, 1)$ et par $(1, 3, 9)$. D'autre part, le noyau de

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

est le plan dirigé par $(1, 3, 9)$ et $(2, 3, 0)$ (par exemple !). On remarque alors que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

SYNTHÈSE.— On considère maintenant la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -9 & 3 \\ 1 & -27 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans peine que Q est inversible (il suffit de calculer son rang). En notant C_1, C_2 et C_3, les trois colonnes de Q, les calculs précédents montrent que

$$AC_1 = C_1, \quad AC_2 = 3C_2, \quad AC_3 = 3C_3 + C_2$$

et donc que $Q^{-1}AQ = T$.

1. c. La matrice T admet 3 pour valeur propre double, alors que le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(T - 3I_3)$ est visiblement une droite vectorielle (et pas un plan). Par suite, T n'est pas diagonalisable et, comme A et T sont semblables, la matrice A n'est pas non plus diagonalisable.

1. d. La matrice T est la somme des matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices commutent (vérification immédiate), donc on peut appliquer la formule du binôme à $(D + N)^n$.

De plus, D est diagonale et N est nilpotente d'indice 2, donc

$$T^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

1. e. D'après ce qui précède,

$$A^n = (QTQ^{-1})^n = QT^nQ^{-1} = P_1 + 3^n \cdot P_2 + n3^n \cdot P_3$$

en posant

$$P_1 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, \qquad P_2 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$\text{et} \qquad P_3 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

2. La suite vectorielle de terme général

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$$

vérifie $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après **[1.e.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n X_0 = a + 3^n b + n3^n c$$

en posant

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_1 X_0, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 X_0$$

$$\text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_3 X_0.$$

3. a. Par définition, x, y et z sont des combinaisons linéaires (à coefficients constants) de g, g' et g''. Comme g est de classe $\mathscr{C}^3$, alors g, g' et g'' sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc x, y et z sont de classe $\mathscr{C}^1$.

En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} &= Q^{-1} \begin{pmatrix} g'(t) \\ g''(t) \\ g^{(3)}(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} A \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} \\ &= Q^{-1} A Q Q^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $x' = x$, $y' = 3y + z$ et $z' = 3z$, donc il existe deux constantes K_1 et K_3 telles que

$$x(t) = K_1 e^t \quad \text{et} \quad z(t) = K_3 e^{3t}$$

et comme $y'(t) - 3y(t) = K_3 e^{3t}$, alors il existe une constante K_2 telle que

$$y(t) = K_2 e^{3t} + K_3 t e^{3t}.$$

3. b. Par définition de x, y et z,

$$\begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \\ g''(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{3t} + K_3 t e^{3t} \\ K_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

donc $g(t) = ae^t + be^{3t} + cte^{3t}$ en posant

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 \\ K_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$