Problème de Mathématiques

Référence pp1606 — Version du 6 décembre 2025

---

1. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

1. a. Expliciter trois réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

1. b. Quel est le polynôme minimal de A ?

1. c. Démontrer qu'il existe trois matrices P_1, P_2 et P_3 dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P_1 + 2^n P_2 + 4^n P_3.$$

2. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 7x_{n+2} - 14x_{n+1} + 8x_n.$$

2. a. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2. b. En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = a + 2^n b + 4^n c.$$

3. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f^{(3)}(t) = 7f''(t) - 14f'(t) + 8f(t).$$

3. a. Démontrer que les fonctions $x = f$, $y = f'$ et $z = f''$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifient le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

3. b. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 2v(t) \\ w'(t) = 4w(t) \end{cases}$$

et en déduire qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = ae^t + be^{2t} + ce^{4t}.$$

Solution ❀ Applications de la réduction des endomorphismes, I

1. a. Avec l'aide éventuelle d'une calculatrice, on trouve

$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X-4).$$

Les matrices colonnes

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A respectivement associés à 1, 2 et 4. Par conséquent, la matrice

$$Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\\1 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

est inversible (des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants) et

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(1,2,4).$$

1. b. Comme la matrice A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,4\}$, alors

$$\mu_A = (X-1)(X-2)(X-4) = X^3 - 7X^2 + 14X - 8.$$

1. c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $Q^{-1}AQ$ est diagonale, alors

$$(Q^{-1}AQ)^n = \mathrm{Diag}(1^n, 2^n, 4^n)$$

donc

$$Q^{-1}A^nQ = \mathrm{Diag}(1,0,0) + 2^n\,\mathrm{Diag}(0,1,0) + 4^n\,\mathrm{Diag}(0,0,1)$$

donc

$$A^n = P_1 + 2^nP_2 + 4^nP_3$$

avec

$$P_1 = Q\,\mathrm{Diag}(1,0,0)Q^{-1}, \qquad P_2 = Q\,\mathrm{Diag}(0,1,0)Q^{-1},$$
$$P_3 = Q\,\mathrm{Diag}(0,0,1)Q^{-1}.$$

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\x_{n+2}\end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence se traduit alors par $X_{n+1} = AX_n$ et une démonstration par récurrence montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^nX_0.$$

Comme on s'intéresse seulement à x_n, on extrait la première ligne de cette égalité par un produit matriciel.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} A^nX_0.$$

2. b. D'après la décomposition de A^n (**[1.c.]**),

$$x_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}(P_1 + 2^nP_2 + 4^nP_3)X_0$$

donc $x_n = a + 2^nb + 4^nc$ en posant

$$a = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}P_1X_0, \qquad b = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}P_2X_0,$$
$$c = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}P_3X_0.$$

REMARQUE.— Pour un calcul à la main, il est plus rapide de déduire a, b et c des valeurs de x_0, x_1 et x_2 (résolution d'un système 3×3) que d'expliciter (laborieusement) les matrices P_1, P_2 et P_3.

REMARQUE.— Les suites qui vérifient la relation de récurrence sont donc des combinaisons linéaires de suites géométriques et les raisons de ces suites géométriques sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire les valeurs propres de A. Pour cette raison, les vecteurs propres de A sont très simples à calculer : cd sont les trois premiers termes de ces suites géométriques.

3. a. Comme f est de classe $\mathscr{C}^3$, il est clair que f, f′ et f″ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et l'équation différentielle étudiée est évidemment équivalente au système suivant.

$$\begin{cases} f'(t) &= f'(t) \\ f''(t) &= f''(t) \\ f^{(3)}(t) &= 8f(t) - 14f'(t) + 7f''(t) \end{cases}$$

3. b. Il ne s'agit pas vraiment d'un *système* différentiel, puisque chaque équation peut être résolue indépendamment des autres.

Les fonctions u, v et w vérifient ce système si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = K_1 e^t, \quad v(t) = K_2 e^{2t}, \quad w(t) = K_3 e^{4t}.$$

❧ Comme la matrice Q est inversible et indépendante de $t \in \mathbb{R}$, la fonction U définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

donc il existe trois réels K_1, K_2 et K_3 tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

et en particulier,

$$f(t) = x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ae^t + be^{2t} + ce^{4t}$$

en posant

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 \\ K_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— En pratique, on détermine les constantes a, b et c en fonction de la condition initiale :

$$f(t_0) = x_0, \quad f'(t_0) = y_0, \quad f''(t_0) = z_0.$$