Problème de Mathématiques

Référence pp1603 — Version du 6 décembre 2025

Soit E, un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit $p \in L(E)$, un projecteur.

1. a. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E.

1. b. En déduire que la trace de p est égale au rang de p.

1. c. Réciproquement, un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{tr} u = \operatorname{rg} u$ est-il nécessairement un projecteur ?

2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, telles que A soit diagonalisable et que B ne soit pas diagonalisable. (On justifiera la réponse !)

3. Soit u, un endomorphisme de E, de rang 1.

3. a. Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

où a_1, a_2, …, a_n sont des nombres réels.

3. b. Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u n'est pas nulle.

3. c. On suppose que $\operatorname{tr} u = \operatorname{rg} u = 1$. Démontrer que u est alors un projecteur.

3. d. Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image et le noyau de ce projecteur. (On caractérisera une droite vectorielle par un vecteur directeur et un plan vectoriel par une équation cartésienne.)

Solution ❀ Quelques propriétés des projecteurs

1. a. On rappelle qu'un vecteur $x \in E$ appartient à l'image du projecteur p si, et seulement si, $p(x) = x$ (ce qui signifie que $\operatorname{Im} p$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1).

Si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, alors $x = p(x)$ (puisque $x \in \operatorname{Im} p$) et $p(x) = 0$ (puisque $x \in \operatorname{Ker} p$), donc $x = 0$, donc $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont en somme directe.

D'autre part,

$$\forall\, x \in E, \quad x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$$

où $p(x) \in \operatorname{Im} p$ (évident) et $[x - p(x)] \in \operatorname{Ker} p$ puisque

$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0.$$

Donc E est bien la somme de $\operatorname{Im} p$ et de $\operatorname{Ker} p$.

Finalement, $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

REMARQUE.— On peut aussi invoquer le théorème du rang, puisque E est un espace de dimension finie.

1. b. Comme E est un espace de dimension finie, il existe une base

$$\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$$

de $\operatorname{Im} p$ (où r est donc le rang de p) et une base

$$\mathscr{B}_0 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$$

de $\operatorname{Ker} p$. Comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans E, la famille

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$$

est une base $\mathscr{B}$ de E et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

puisque $p(e_k) = e_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$ et $p(e_k) = 0$ pour $r < k \leqslant n$.

On en déduit que la trace de p est égale à r, c'est-à-dire au rang de p.

1. c. Considérons l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice

$$A = \operatorname{Diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0_{n-2}\right).$$

Le rang et la trace de u sont égaux à 2, mais u n'est pas un projecteur puisque $A^2 \neq A$.

2. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 1$ et que A est diagonal(isabl)e.

D'autre part, B est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 0 est donc la seule valeur propre de B. Si B était diagonalisable, alors il existerait une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}BQ = \operatorname{Diag}(0, 0, 0) = 0_3$$

donc

$$B = Q \times 0_3 \times Q^{-1} = 0_3,$$

ce qui est faux. Donc B n'est pas diagonalisable.

3. a. Comme $\operatorname{rg} u = 1$ et $\dim E = n$, le théorème du rang montre que $\dim \operatorname{Ker} u = n - 1$: il existe une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} u$. Comme la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre et que $\dim E = n$, il existe un vecteur e_n tel que

$$\beta = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$$

soit une base de E (théorème de la base incomplète).

Par définition, $u(e_k) = 0$ pour $1 \leqslant k < n$ et, comme β est une base de E, il existe des scalaires a_1, …, a_n tels que

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot e_k.$$

On résume cela par

$$\mathfrak{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

3. b. On en déduit que $\operatorname{tr} u = a_n$ et que $\operatorname{Sp}(u) = \{0, a_n\}$ puisque les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

❧ Si $\operatorname{tr} u = 0$, alors $a_n = 0$, donc $\operatorname{Sp}(u) = \{0\}$ et comme $u \neq \omega$, on en déduit (comme au 0) que u n'est pas diagonalisable.

❧ Si $\operatorname{tr} u \neq 0$, alors

$$\dim \operatorname{Ker} u = n - 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(u - a_n I) \geqslant 1$$

(un sous-espace propre n'est jamais réduit à $\{0\}$), donc

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda I) \geqslant \dim E,$$

donc u est diagonalisable. Dans ce cas, il existe une base γ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}_\gamma(u) = \operatorname{Diag}(0, \dots, 0, a_n).$$

3. c. Si $\operatorname{tr} u = 1$, alors $a_n = 1$, donc (en reprenant les notations de la question précédente)

$$\mathfrak{Mat}_\gamma(u^2) = \mathfrak{Mat}_\gamma(u),$$

donc $u^2 = u$, donc u est bien un projecteur.

3. d. On vérifie facilement que

$$A^2 = A$$

donc A est bien la matrice d'un projecteur.

Le rang de A est clairement égal à 1, donc

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, le noyau de A est donc un plan. On déduit de l'examen des colonnes de A que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et donc (calcul classique, à savoir faire) que

$$\operatorname{Ker} A = [x + y - z = 0].$$