Problème de Mathématiques

Référence pp1602 — Version du 6 décembre 2025

On considère les suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases}$$

et la donnée de $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$.

1. Justifier *sans calcul* que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

2. a. Diagonaliser la matrice A : expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$P^{-1}AP = D.$$

2. b. Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Expliciter u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Solution ❀ Suites récurrentes linéaires

Puisque l'usage de la calculatrice est autorisé, il faut limiter au minimum les calculs à la main pour traiter cet exercice très rapidement.

1. D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique *réelle* est diagonalisable.

2. a. On trouve les valeurs propres en *factorisant* le polynôme caractéristique (avec la calculatrice) :

$$\chi_A = X^3 - 3X^2 - 22X + 24 = (X-1)(X+4)(X-6).$$

❧ Comme la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

❧ Les noyaux des matrices

$$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sont les droites vectorielles dirigées respectivement par $(3, -5, 4)$, par $(4, 0, -3)$ et par $(3, 5, 4)$.

❧ Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants, donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

est inversible et comme les colonnes de P sont des vecteurs propres de A respectivement associés à -4, 1 et 6, on en déduit que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-4, 1, 6).$$

REMARQUE.— On peut aussi factoriser à la main le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4(1-\lambda) \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3(1-\lambda) \end{vmatrix} && (C_3 \leftarrow 3C_3 - 4C_1) \\
&= \frac{1-\lambda}{3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1-\lambda}{3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -7/3 & -4 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 - 4/3 C_3) \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 25/3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 5^2]
\end{aligned}$$

2. b. On connaît une base orthogonale (X_1, X_2, X_3) de vecteurs propres (les colonnes de la matrice P), ce qui donne directement la décomposition spectrale de A :

$$A = \lambda_1 \cdot \frac{X_1\,{}^tX_1}{{}^tX_1X_1} + \lambda_2 \cdot \frac{X_2\,{}^tX_2}{{}^tX_2X_2} + \lambda_3 \cdot \frac{X_3\,{}^tX_3}{{}^tX_3X_3}$$

d'où la décomposition spectrale de A^n sans autres calculs :

$$A^n = \lambda_1^n \cdot \frac{X_1\,{}^tX_1}{{}^tX_1X_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{X_2\,{}^tX_2}{{}^tX_2X_2} + \lambda_3^n \cdot \frac{X_3\,{}^tX_3}{{}^tX_3X_3}$$

soit

$$\begin{aligned}
A^n = \frac{(-4)^n}{50} &\begin{pmatrix} 9 & -15 & 12 \\ -15 & 25 & -20 \\ 12 & -20 & 16 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1^n}{25} \begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \frac{6^n}{50} \begin{pmatrix} 9 & 15 & 12 \\ 15 & 25 & 20 \\ 12 & 20 & 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

VARIANTE.— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que

$$X^n = (X+4)(X-1)(X-6)Q_n + (a_nX^2 + b_nX + c_n).$$

En substituant -4, 1 et 6 à X, on en déduit que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-4)^n - 2 + 6^n}{50}, \\ b_n &= \frac{-7\cdot(-4)^n + 4 + 3\cdot 6^n}{50}, \\ c_n &= \frac{3\cdot(-4)^n + 24 - 2\cdot 6^n}{25} \end{aligned}$$

et comme χ_A est un polynôme annulateur de A (Cayley–Hamilton), alors

$$\begin{aligned} A^n &= a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 \\ &= (-4)^n \cdot \left[\frac{1}{50}A^2 - \frac{7}{50}A + \frac{3}{25}I_3\right] \\ &\quad + (1)^n \cdot \left[\frac{-1}{25}A^2 + \frac{2}{25}A + \frac{24}{25}I_3\right] \\ &\quad + 6^n \cdot \left[\frac{1}{50}A^2 + \frac{3}{50}A - \frac{2}{25}I_3\right]. \end{aligned}$$

3. On remarque que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit (par une récurrence immédiate) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P est inversible, on sait qu'il existe un, et un seul, triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

et on déduit de cette décomposition que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = 1^n \cdot a \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + (-4)^n \cdot b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 6^n \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4a &+& 3b &+& 3c &=& 1 \\ &-& 5b &+& 5c &=& 0 \\ -3a &+& 4b &+& 4c &=& 1 \end{array} \right.$$

est calculée à la machine :

$$a = \frac{1}{25}, \quad b = c = \frac{7}{50}$$

donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{7\cdot(-4)^n}{50} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{7\cdot 6^n}{50} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.