Problème de Mathématiques

Référence pp1601 — Version du 6 décembre 2025

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. a. Décrire le noyau de u.
2. b. Résoudre l'équation

$$u(x, y, z) = -(x, y, z)$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. c. Exprimer $u(\varepsilon_3)$ en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3.
2. d. Calculer $u^n(\varepsilon_1)$, $u^n(\varepsilon_2)$ et $u^n(\varepsilon_3)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. (On rappelle que $u^n = u \circ \cdots \circ u$ où u apparaît n fois.)
3. Calculer $P^{-1}AP$.
4. On considère les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = & 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = & x_n - 5y_n - 4z_n \\ z_{n+1} = & -x_n + 7y_n + 6z_n \end{cases}$$

et la condition initiale :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -2, \quad z_0 = 3.$$

En reliant le vecteur (x_0, y_0, z_0) à ε_1, ε_2 et ε_3, calculer l'expression de x_n, y_n et z_n.
5. On considère trois fonctions x, y et z de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que ces fonctions sont bornées au voisinage de $+\infty$ et qu'elles vérifient le système suivant.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = & 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = & x(t) - 5y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = & -x(t) + 7y(t) + 6z(t) \end{cases}$$

5. a. Expliciter une matrice ligne $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ telle que $LA = 2L$.
5. b. Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) = Ke^{2t}.$$

5. c. En déduire que $y(0) = -z(0)$.

Solution ❀ Réduction d'une matrice

1. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est représentée par la matrice P dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donc : c'est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, la matrice P est inversible.

En effectuant les deux opérations de pivot :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1,$$

puis une permutation des colonnes, on obtient

$$P \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme les opérations de pivot conservent le rang et que la dernière matrice est clairement inversible, on en déduit que P est inversible et (par conséquent) que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. a. On traduit l'équation $u(x, y, z) = (0, 0, 0)$ par le système $AX = 0$. La résolution de ce système montre que le noyau de u est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur ε_2.

2. b. L'équation $u(x, y, z) = -(x, y, z)$ se traduit par le système matriciel $(A + I_3)X = 0$. L'ensemble des solutions est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par ε_1.

2. c. On vérifie sans peine que $u(\varepsilon_3) = 2 \cdot \varepsilon_3$.

2. d. D'après les questions précédentes,

$$u(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1, \quad u(\varepsilon_2) = 0, \quad u(\varepsilon_3) = 2 \cdot \varepsilon_3.$$

On en déduit par récurrence que

$$u^n(\varepsilon_1) = (-1)^n \cdot \varepsilon_1, \quad u^n(\varepsilon_2) = 0, \quad u^n(\varepsilon_3) = 2^n \cdot \varepsilon_3$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. D'après la formule du changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. D'après la question précédente,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Il est inutile de calculer P^{-1} !

4. Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

et par récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base, il existe un, et un seul, triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x_0, y_0, z_0) = a \cdot \varepsilon_1 + b \cdot \varepsilon_2 + c \cdot \varepsilon_3.$$

On peut poser ce système et le résoudre (ce qui revient à inverser la matrice P) ou se contenter de faire preuve d'un peu flair pour obtenir :

$$(x_0, y_0, z_0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3.$$

Par linéarité de u^n, on en déduit que

$$\begin{aligned} (x_n, y_n, z_n) &= u^n(x_0, y_0, z_0) \\ &= u^n(\varepsilon_1) + u^n(\varepsilon_3) \\ &= (-1)^n \cdot \varepsilon_1 + 2^n \cdot \varepsilon_3 \\ &= \big(2^n,\ (-1)^{n+1} - 2^n,\ (-1)^n + 2^{n+1}\big). \end{aligned}$$

5. a. Les solutions de l'équation matricielle sont de la forme

$$L = \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(résolution sans difficulté).

5. b. Posons $g(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t)$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \alpha x'(t) + \beta y'(t) + \gamma z'(t) \\ &= L \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = LA \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = 2L \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = 2g(t). \end{aligned}$$

En tant que solution de l'équation $y' = 2y$, la fonction g a une expression de la forme Ke^{2t} : cqfd.

5. c. Choisissons $\beta = 1$ dans l'expression de L (**5.a.**). Comme x, y et z sont bornées au voisinage de $+\infty$, il en va de même pour la fonction g. D'après **5.b.**, il faut que Ke^{2t} reste bornée lorsque t tend vers $+\infty$ et la seule possibilité pour cela est que $K = 0$. Par suite,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = y(t) + z(t) = 0$$

et en particulier (pour $t = 0$) : $y(0) = -z(0)$.