Problème de Mathématiques

Référence pp1704 — Version du 6 décembre 2025

On suppose connue une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relative à $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Partie A. Réduction de A

1. Quel est le rang de A ?

2. Expliciter une base de $\operatorname{Ker} A$ et une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} A$.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire deux réels a et b tels que

$$f^2(e_1 + a \cdot e_2 + b \cdot e_3) \neq 0.$$

5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

6. On cherche à démontrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. a. On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle f est représenté par la matrice A'.

Exprimer les vecteurs $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$ et $f(\varepsilon_3)$ en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3. Exprimer ensuite ε_2 et ε_3 en fonction de ε_1.

6. b. On suppose en outre que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Identifier la seule matrice P possible, vérifier qu'elle est inversible et expliciter son inverse P^{-1}.

6. c. Conclure.

Partie B. Application à la résolution d'un système différentiel

On cherche les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

qui vérifient la condition initiale

$$\big\{x(0) = -2, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -2\big\}.$$

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$X_t = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_t = P^{-1}X_t = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

7. a. Exprimer la matrice colonne X'_t en fonction de X_t et de A.

7. b. Démontrer que $Y'_t = P^{-1}X'_t$, puis exprimer Y'_t en fonction de Y_t.

8. En déduire les expressions de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

9. On cherche si le support de l'arc paramétré

$$\big[(x(t), y(t), z(t)),\ t \in \mathbb{R}\big]$$

est contenu dans un plan affine.

9. a. On suppose qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad ax(t) + by(t) + cz(t) = d.$$

Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot AX_t = 0.$$

9. b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} {}^t A$.

9. c. Conclure.

Solution ❀ Réduction d'une matrice

Partie A. Réduction de A

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est supérieur à 2. Par ailleurs, on peut remarquer que

$$C_3 = C_1 - C_2 \tag{1}$$

donc le rang de A est inférieur à 2. Le rang de A est donc égal à 2.

2. D'après le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} A$ est égale à 1 et la relation de liaison (1) signifie que le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient au noyau de f. Donc

$$\operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

❧ L'image de A est le sous-espace engendré par les colonnes de A. Comme le rang de A est égal à 2 et que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles,

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le vecteur $x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$ appartient donc à $\operatorname{Im} f$ si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par la troisième colonne, on en déduit que

$$\operatorname{Im} A = [x + z = 0].$$

3. On vérifie que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre, d'après la question précédente, que $\operatorname{Im}(A^2) = \operatorname{Ker}(A)$. Par conséquent, A^3 est la matrice nulle et donc :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad A^n = 0.$$

4. Comme la première colonne de A^2 n'est pas nulle, on en déduit que $f^2(e_1) \neq 0$: il suffit de choisir $(a, b) = (0, 0)$.

5. La matrice A est nilpotente, donc son spectre est réduit à $\{0\}$ et le sous-espace propre associé à 0 est simplement $\operatorname{Ker} A$.

6. a. S'il existe une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est égale à A', alors (en lisant les *colonnes* de A') il faut que

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3, \quad f(\varepsilon_3) = 0.$$

On en déduit que $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$ et $\varepsilon_3 = f^2(\varepsilon_1)$.

6. b. Par hypothèse sur la première colonne de P, il faut que $\varepsilon_1 = e_1$. D'après l'analyse précédente, il faut donc que

$$\varepsilon_2 = f(e_1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = f^2(e_1).$$

On déduit des matrices A et A^2 que la seule matrice possible est la suivante.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

❧ On voit facilement que le rang de cette matrice est égal à 3. Cette famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc une base de E et cette matrice P est bien inversible.

❧ On vérifie ensuite que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(On peut par exemple remarquer que $e_1 = \varepsilon_1$, puis que $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ et en déduire que $e_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3$: la matrice P^{-1} est aussi la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.)

6. c. La matrice P qu'on vient de trouver est inversible : c'est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Par construction,

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3.$$

Enfin, $f(\varepsilon_3) = 0$ (puisque f^3 est l'endomorphisme nul).

La formule de changement de base nous dit que $P^{-1}AP$ est la matrice de f relative à la base $\mathscr{B}'$. Les relations précédentes prouvent que $P^{-1}AP = A'$. On a ainsi démontré que les matrices A et A' sont semblables.

Partie B. Application à la résolution d'un système différentiel

7. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X'_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = AX_t.$$

7. b. Comme la matrice P est indépendante de t, les fonctions u, v et w sont des combinaisons linéaires *à coefficients constants* des fonctions x, y et z. Donc

$$Y'_t = P^{-1}X'_t = P^{-1}(AX_t) = (P^{-1}AP)P^{-1}X_t = (P^{-1}AP)Y_t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

8. Cette équation différentielle matricielle peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel triangulaire (et donc simple à résoudre) :

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = u(t) \\ w'(t) = v(t) \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \\[1ex] v(t) = u(0)t + v(0) \\[1ex] w(t) = \dfrac{u(0)}{2}t^2 + v(0)t + w(0). \end{cases} \tag{2}$$

On sait comment choisir les constantes d'intégration : comme $Y_0 = P^{-1}X_0$, alors

$$u(0) = -4, \quad v(0) = -2 \quad \text{et} \quad w(0) = 4$$

et comme $X_t = PY_t$, on en déduit l'expression des solutions :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = -2t^2 - 6t - 2 \\ y(t) = 2t^2 + 10t \\ z(t) = 2t^2 + 6t - 2. \end{cases}$$

9. a. Si une fonction est constante, alors sa dérivée est nulle. Par conséquent,

$$ax'(t) + by'(t) + cz'(t) = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} X'_t = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} AX_t = 0.$$

9. b. On sait que les matrices A et ${}^tA$ ont même rang, donc le noyau de ${}^tA$ est une droite vectorielle. En inspectant les colonnes de ${}^tA$, on constate que $C_1 + C_3 = 0$ et donc que la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de ${}^tA$: c'est donc une base de $\operatorname{Ker}{}^tA$.

9. c. En tranposant le résultat de la question précédente,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} AX_t = 0$$

donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + z'(t) = 0.$$

On en déduit que la fonction $x + z$ est constante et en tenant compte de la condition initiale que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) + z(t) = -4.$$

La courbe paramétrée par $\big[x(t), y(t), z(t)\big]_{t\in\mathbb{R}}$ est donc contenue dans le plan affine $[x + z = -4]$.