Problème de Mathématiques

Référence pp1703 — Version du 6 décembre 2025

Soient E, un espace vectoriel réel ; u, un endomorphisme de E et P, un polynôme non nul à coefficients réels.

1. On suppose que λ est une valeur propre de u. Démontrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

2. On suppose que $P(u)$ est l'endomorphisme nul.

2. a. Démontrer que toute valeur propre de u est racine de P.

2. b. Toute racine de P est-elle valeur propre de u ?

3. On suppose que

$$u^3 - u^2 + u - I_E = 0.$$

Que dire du spectre de u ?

Solution ❀ Polynôme annulateur d'un endomorphisme

1. Par hypothèse, il existe un vecteur $x_0 \neq 0_E$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Par récurrence, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n(x_0) = \lambda^n x_0$$

et, par combinaison linéaire, que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad P(u)(x_0) = P(\lambda)\, x_0.$$

Comme le vecteur x_0 n'est pas nul, cela montre que $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.

2. a. Si $P(u)$ est l'endomorphisme nul, alors sa seule valeur propre est 0. D'après la première question, $P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

2. b. Le polynôme minimal de l'application nulle ω est égal à X. Tout multiple de X est un polynôme annulateur de ω mais peut admettre des racines non nulles : c'est le cas de $X(X-1)(X+1)$ par exemple...

3. Le polynôme

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$$

est un polynôme annulateur de u, qui admet 1 pour seule racine réelle, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1\}$.