Problème de Mathématiques

Référence pp1809 — Version du 6 décembre 2025

Soit p, un entier supérieur à 2. Pour toute matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$, on appelle **racine p-ième** de B toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que
$$A^p = B.$$
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille (n, n) sera noté $U_n(\mathbb{C})$.

1. Soient A_1 et A_2, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; X_1 et X_2, deux matrices colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$; λ_1 et λ_2, deux nombres complexes. Calculer le produit matriciel suivant.
$$\begin{pmatrix} A_1 & X_1 \\ 0_{1,n} & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & X_2 \\ 0_{1,n} & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^k \end{pmatrix}$$
où on a posé
$$X_k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} A^j\right) X.$$

3. On note V_p, l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité différentes de 1.
$$V_p = \left\{ e^{2ik\pi/p},\ 1 \leqslant k < p \right\}$$

3. a. Soient a et λ, des nombres complexes non nuls. On suppose que ${}^{a}/_{\lambda} \notin V_p$. Démontrer que
$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a^j \neq 0.$$

3. b. Soient $A = (a_{i,j}) \in U_n(\mathbb{C})$, une matrice *inversible* et λ, un nombre complexe non nul. On suppose en outre que
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{a_{i,i}}{\lambda} \notin V_p.$$
Démontrer que la matrice
$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A^j$$
est inversible.

4. Démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété HR_n suivante : pour toute matrice inversible $B \in U_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice inversible $A \in U_n(\mathbb{C})$ telle que
$$A^p = B \quad \text{et que} \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \frac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin V_p.$$

5. Démontrer que toute matrice inversible $B \in GL_n(\mathbb{C})$ admet au moins une racine p-ième.

Solution ❀ Racines p-ièmes dans $GL_n(\mathbb{C})$

1. Le produit appartient à $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et est égal à la matrice

$$\begin{pmatrix} A_1A_2 & A_1X_2+\lambda_2X_1 \\ 0_{1,n} & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

2. On procède par récurrence.
Si $k=1$, alors

$$\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{(k-1)-j}A^j = \lambda^0A^0 = I_n$$

donc $X_1 = X$.
HR : On suppose que, pour un entier $k \geqslant 1$, la matrice colonne X_k est égale à

$$\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j\Big)X.$$

D'après la formule du produit matriciel par blocs, la matrice

$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}$$

est égale à

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} & AX_k+\lambda^kX \\ 0_{1,n} & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Par HR,

$$\begin{aligned} AX_k+\lambda^kX &= A\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j\Big)X+\lambda^kX \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-(j+1)}A^{j+1}X+\lambda^{k-0}A^0X \\ &= \sum_{j=0}^{k} \lambda^{k-j}A^jX \\ &= \sum_{j=0}^{(k+1)-1} \lambda^{(k+1)-1-j}A^jX = X_{k+1}. \end{aligned}$$

Le résultat est établi par récurrence.

3. a. Comme ${}^{a}\!/\!{}_{\lambda} \notin V_p$, deux cas se présentent :
— Ou bien ${}^{a}\!/\!{}_{\lambda}$ n'est pas une racine p-ième de l'unité, c'est-à-dire $a^p/\lambda^p \neq 1$;
— Ou bien ${}^{a}\!/\!{}_{\lambda}$ est une racine p-ième de l'unité et, dans ce cas, elle est égale à 1, c'est-à-dire $a=\lambda$.

❧ Si $a=\lambda$, alors les p termes de la somme sont tous égaux :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j = \sum_{j=0}^{p-1} a^{p-1} = pa^{p-1} \neq 0$$

puisque $a \neq 0$ et $p \geqslant 2$ par hypothèse.

❧ Si $a^p/\lambda^p \neq 1$, alors $a \neq \lambda$ et $a^p \neq \lambda^p$ et on déduit de la formule de la somme géométrique que

$$(a-\lambda)\Big(\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j\Big) = a^p-\lambda^p$$

ce qui prouve que

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j}a^j \neq 0.$$

3. b. Comme A est triangulaire supérieure, toutes les matrices A^j sont triangulaires supérieures et la matrice

$$M_p = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A^j$$

est elle aussi triangulaire supérieure. Pour montrer que M_p est inversible, il suffit donc de vérifier que ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0.

Comme le i-ème coefficient diagonal de A^j est égal à $a_{i,i}^j$, le i-ème coefficient diagonal de M_p est égal à

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a_{i,i}^j$$

et donc différent de 0 d'après la question précédente, puisque $a_{i,i} \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et $a_{i,i}/\lambda \notin V_p$ par hypothèse.

La matrice M_p est bien inversible.

4. Initialisation : pour $n = 1$, on peut identifier la matrice B à son unique coefficient $b = b_{1,1} \in \mathbb{C}^*$. Comme tout nombre complexe non nul possède exactement p racines p-ièmes non nulles dans $\mathbb{C}$, il existe p matrices inversibles $A \in U_1(\mathbb{C})$ telles que $A^p = B$. L'autre condition est automatiquement vérifiée puisqu'il n'existe aucun couple (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant 1$.

❧ On suppose que l'hypothèse de récurrence HR_n est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ et on considère une matrice

$$B = \begin{pmatrix} B_n & X \\ 0_{1,n} & b \end{pmatrix} \in U_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}).$$

Comme B est inversible, le bloc diagonal B_n est inversible et le complexe b est différent de 0. Comme B est triangulaire supérieure, le bloc diagonal B_n est lui aussi triangulaire supérieur.

En appliquant HR_n à la matrice inversible $B_n \in U_n(\mathbb{C})$, on sait qu'il existe une matrice $A_n = (a_{i,j}) \in U_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A_n^p = B_n \quad \text{et que} \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \frac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin V_p$$

et on considère maintenant une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_n & X' \\ 0_{n,1} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Comme le bloc diagonal A_n est inversible et triangulaire supérieur, on en déduit d'une part que la matrice A est triangulaire supérieure et d'autre part qu'elle est inversible quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

D'après **[2.]** et **[3.b.]**,

$$A^p = \begin{pmatrix} A_n^p & M_p X' \\ 0_{n,1} & \lambda^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n & M_p X' \\ 0_{n,1} & \lambda^p \end{pmatrix}$$

où la matrice

$$M_p = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A_n^j$$

est inversible (puisque A est triangulaire supérieure et inversible).

Par conséquent, la matrice A vérifie $A^p = B$ si, et seulement si, $\lambda^p = b$ et $M_p X' = X$. Comme $b \in \mathbb{C}^*$, on a p choix possibles pour λ. Comme la matrice M_p est inversible, on a un, et un seul, choix pour la matrice colonne X' :

$$X' = M_p^{-1} X.$$

Par ailleurs, les coefficients diagonaux de la matrice A sont ceux de la matrice A_n :

$$a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$$

auxquels on a adjoint λ et comme $A^p = B$, alors :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad a_{i,i}^p = b_{i,i} \quad \text{et} \quad \lambda^p = b.$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad \frac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin V_p.$$

Il reste donc à vérifier que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{a_{i,i}}{\lambda} \notin V_p.$$

On distingue deux cas :

— Si $b_{i,i} \neq b$, alors $a_{i,i}^p \neq \lambda^p$, donc $a_{i,i}/\lambda$ n'est pas une racine p-ième de l'unité, donc $a_{i,i}/\lambda \notin V_p$ (quelle que soit la valeur choisie pour λ parmi les p valeurs possibles).

— Si $b_{i,i} = b$, alors $a_{i,i}^p = \lambda^p$, donc il faut choisir $\lambda = a_{i,i}$. Cela pourrait aboutir à une contradiction s'il existait plusieurs indices $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $a_{i,i}^p = a_{j,j}^p = \lambda^p$. Mais dans ce cas, HR_n nous assure que $a_{i,i}/a_{j,j} \notin V_p$ et donc que $a_{i,i} = a_{j,j}$: pas de contradiction possible donc !

Il existe donc au moins une matrice $A \in U_{n+1}(\mathbb{C}) \cap GL_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^p = B$ et qui vérifie la contrainte imposée sur les coefficients diagonaux.

❧ Conclusion : pour toute matrice inversible $B \in U_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice inversible $A \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = B$. (La propriété supplémentaire ne nous intéresse pas spécialement : sa seule raison d'être était de formuler une hypothèse de récurrence qui soit héréditaire.)

5. Toute $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Par conséquent, si $B \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice de passage $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}BQ \in U_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C}).$$

D'après la question précédente, il existe une matrice inversible $A \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = Q^{-1}BQ$. On en déduit que

$$B = QA^pQ^{-1} = (QAQ^{-1})^p$$

ce qui prouve que la matrice B admet au moins une racine p-ième dans $GL_n(\mathbb{C})$.