Problème de Mathématiques

Référence pp1812 — Version du 6 décembre 2025

On pose $E = \mathbb{R}^n$ où l'entier n est supérieur à 2. L'endomorphisme identiquement nul de E est noté ω_E.

1. (Question de cours) Soient u et v, deux endomorphismes de E. Démontrer que : si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

2. On considère un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^2 = \omega_E$.

2. a. Démontrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

2. b. En déduire une inégalité reliant n et $\operatorname{rg} u$.

3. Dans cette question, $n = 2$ et on suppose que $u \neq \omega_E$.

3. a. Démontrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = D.$$

3. b. Soit $v \in L(E)$, tel que $v^2 = \omega_E$ et que

$$v \circ u = u \circ v.$$

En comparant $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$, démontrer que

$$u \circ v = \omega_E.$$

3. c. Soit $w \in L(E)$ tel que $w^2 = \omega_E$ et que

$$w \circ u = u \circ w.$$

Démontrer que

$$w \circ v = v \circ w = \omega_E.$$

4. On revient au cas général : $E = \mathbb{R}^n$ et on considère m endomorphismes $u_1, \dots, u_m$ de E tels que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m, \quad u_i^2 = \omega_E$$

et que

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant m, \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \operatorname{Im} u_1$ et

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant m, \quad F_i = \operatorname{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_i).$$

4. a. Démontrer que, pour tout $1 \leqslant i < m$, le sous-espace F_i est stable par u_{i+1}.

4. b. En déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \dim F_i \leqslant \frac{n}{2^i}.$$

4. c. Que peut-on en déduire lorsque $2^m > n$?

Solution ❀ Familles d'endomorphismes nilpotents

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0$ et

$$u\big(v(x)\big) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big) = v(0) = 0$$

d'après l'hypothèse de commutativité et la linéarité de v. Cela signifie que le vecteur $v(x)$ appartient au noyau de u. On a démontré que le noyau de u était stable par v.

Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et

$$v(y) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) \in \operatorname{Im} u.$$

On a démontré que l'image de u était stable par v.

2. a. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et

$$u(y) = (u \circ u)(x) = \omega_E(x) = 0_E$$

donc $y \in \operatorname{Ker} u$. On a démontré que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

2. b. Comme E est un espace vectoriel de dimension *finie*, on déduit du théorème du rang que

$$\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E = n.$$

Or $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, donc $\operatorname{rg} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$ et par conséquent

$$2 \operatorname{rg} u \leqslant n.$$

3. a. Comme $u \neq \omega_E$, alors $\operatorname{rg} u \geqslant 1$. D'après la question précédente, $\operatorname{rg} u \leqslant 2/2 = 1$. Donc le rang de u est égal à 1.

Autrement dit, le sous-espace vectoriel $D = \operatorname{Im} u$ est une droite vectorielle.

D'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg} u = 2 - 1 = 1$$

et d'après la question précédente, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. On déduit de cette inclusion et de l'égalité des dimensions que les deux sous-espaces sont égaux :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u.$$

3. b. On distingue trois cas.

Premier cas : $v = \omega_E$. Par linéarité de u, la composée $u \circ v$ est l'endomorphisme nul.

Deuxième cas : $v \neq \omega_E$ et dans ce cas, v vérifie les mêmes hypothèses que u. L'étude de u menée au **[3.a.]** montre qu'il existe une droite vectorielle D' telle que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} v = D'$.

Cas 2.a : $D = D'$. Dans ce cas, pour tout $x \in E$, on a

$$v(x) \in \operatorname{Im} v = D' = D = \operatorname{Ker} u$$

donc $(u \circ v)(x) = u\big(v(x)\big) = 0_E$ et donc : $u \circ v = \omega_E$.

Cas 2.b : $D \neq D'$. Dans ce cas, $D \cap D'$ est un sous-espace strict de la droite vectorielle D, donc $D \cap D' = \{0_E\}$. Pour tout $x \in E$, on sait que

$$D = \operatorname{Im} u \ni u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) \in \operatorname{Im} v = D'.$$

Le seul vecteur de $D \cap D'$ étant le vecteur nul, on a démontré que

$$\forall\, x \in E, \quad (u \circ v)(x) = 0_E$$

et donc que $u \circ v = \omega_E$.

En conclusion, dans tous les cas possibles, la composée $u \circ v$ est l'endomorphisme nul.

3. c. Comme la propriété à établir est évidente dans le cas où $w = \omega_E$ et dans le cas où $v = \omega_E$, on suppose dans ce qui suit que ni v, ni w n'est l'endomorphisme nul.

L'étude de u au **[3.a.]** montre alors que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im} w$ sont deux droites vectorielles et comme

$$u \circ v = u \circ w = \omega_E,$$

on en déduit que ces deux droites vectorielles sont contenues dans la droite vectorielle $D = \operatorname{Ker} u$. On en déduit (inclusion des sous-espaces et égalité des dimensions) que

$$\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} w = D$$

et comme on sait aussi que $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} w = \operatorname{Ker} w$, on en déduit que

$$\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} w \quad \text{et que} \quad \operatorname{Im} w = \operatorname{Ker} v.$$

Par conséquent, $w \circ v = v \circ w = \omega_E$.

4. a. Comme les u_k commutent deux à deux, on sait que les endomorphismes u_{i+1} et $v_i = u_1 \circ \cdots \circ u_i$ commutent, donc le sous-espace F_i, en tant qu'image de l'endomorphisme v_i, est stable par u_{i+1} (cf question de cours).

4. b. Comme F_i est stable par u_{i+1}, on peut définir l'endomorphisme $w_{i+1} \in L(F_i)$ induit par restriction de u_{i+1} à F_i.

Pour tout $x \in F_i \subset E$,

$$w_{i+1}^2(x) = u_{i+1}^2(x) = \omega_E(x) = 0_E.$$

On peut alors déduire de **[2.b.]** que

$$\operatorname{rg} w_{i+1} \leqslant \frac{1}{2} \dim F_i.$$

❧ Si $y \in \operatorname{Im} w_{i+1}$, alors il existe $x \in F_i$ tel que

$$y = w_{i+1}(x) = u_{i+1}(x)$$

et comme $x \in F_i$, il existe $x_0 \in E$ tel que

$$x = (u_1 \circ \cdots \circ u_i)(x_0).$$

Comme les endomorphismes u_k commutent deux à deux,

$$y = u_{i+1} \circ (u_1 \circ \cdots \circ u_i)(x_0) = (u_1 \circ \cdots \circ u_i \circ u_{i+1})(x_0)$$

ce qui prouve que $y \in F_{i+1}$.

Réciproquement, si $y \in F_{i+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$\begin{aligned} y &= (u_1 \circ \cdots \circ u_i \circ u_{i+1})(x) \\ &= u_{i+1}\big(\underbrace{u_1 \circ \cdots \circ u_i(x_0)}_{\in F_i}\big) \\ &= w_{i+1}\big(u_1 \circ \cdots \circ u_i(x_0)\big) \in \operatorname{Im} w_{i+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, 1 \leqslant i < m, \quad \operatorname{rg} w_{i+1} = \dim F_{i+1} \leqslant \frac{1}{2} \dim F_i.$$

❧ Par **[2.b.]** appliqué à $u_1 \in L(E)$, on sait que

$$\dim F_1 = \operatorname{rg} u_1 \leqslant n/2.$$

La relation de récurrence précédente permet d'en déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \dim F_i \leqslant \frac{n}{2^i}.$$

4. c. Si $2^m > n$, alors $\dim F_m < 1$, ce qui prouve que $\dim F_m = 0$ (la dimension d'un espace vectoriel est un entier) et donc que

$$\operatorname{Im}(u_1 \circ \cdots \circ u_m) = F_m = \{0_E\}.$$

Autrement dit,

$$u_1 \circ \cdots \circ u_m = \omega_E.$$