Problème de Mathématiques

Référence pp1815 — Version du 6 décembre 2025

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la trace et le déterminant de A.

2. On peut en déduire que le polynôme caractéristique de A est un polynôme à coefficients entiers, de la forme
$$\chi_A = X^3 - 3X^2 + aX + 24.$$
On *conjecture* que χ_A est scindé et que toutes les racines de χ_A sont *entières* (et, pour cette question, on ne demande pas de calculer explicitement ces racines).

2. a. Démontrer que deux racines de χ_A sont strictement positives et que la troisième est strictement négative.

2. b. En déduire que toute racine de χ_A est un diviseur de 24.

2. c. Démontrer que la plus petite racine (en valeur absolue) de χ_A est égale à ± 1 ou à ± 2.

3. Calculer χ_A sous forme factorisée.

4. On note
$$a < b < c$$
les trois valeurs propres de A.

4. a. Calculer une base de chacun des sous-espaces suivants.
$$\operatorname{Ker}(A - aI_3) \quad \operatorname{Ker}(A - bI_3) \quad \operatorname{Ker}(A - cI_3)$$

4. b. En déduire une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que
$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(a, b, c).$$

5. On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 1$$
et qui vérifient les relations de récurrence suivantes.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array}\right.$$
Nous allons étudier ces trois suites au moyen des matrices colonnes
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

5. a. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n. En déduire une expression de X_n en fonction de X_0, A et n.

5. b. Démontrer qu'il existe trois matrices colonnes U_1, U_2 et U_3 telles que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (-4)^n U_1 + U_2 + 6^n U_3.$$
NB. On ne demande pas de calculer explicitement les colonnes U_1, U_2 et U_3, mais de décrire une méthode précise qui permettrait de les calculer (à la main ou avec une calculatrice).

Solution ❀ Étude d'une suite récurrente

1. La trace est égale à 3 et le déterminant à -24 (calculé, par exemple, par la règle de Sarrus — Pierre-Frédéric Sarrus, pas Jean Sarrus).

2. a. Le déterminant de A n'est pas nul, donc 0 n'est pas une valeur propre de A.

Comme χ_A est scindé, le déterminant est aussi produit des valeurs propres. Si A avait deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive, alors leur produit serait positif. Mais le déterminant de A est *négatif*, donc le nombre de valeurs propres strictement négatives est égal à 1 ou à 3.

S'il y avait trois valeurs propres strictement négatives, leur somme (c'est-à-dire la trace de A) serait strictement négative. Or la trace de A est strictement positive.

Donc il n'y a qu'une seule valeur propre strictement négative et deux valeurs propres strictement positives. (Le raisonnement précédent s'applique même si les deux valeurs propres positives sont égales. Il ne s'applique pas s'il y a des valeurs propres complexes.)

2. b. Une racine λ de χ_A vérifie :

$$\lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - a) = 24.$$

Comme les coefficients de A sont des *entiers*, tous les coefficients du polynôme caractéristique (y compris a) sont des entiers. Si λ est un entier, la relation ci-dessus implique que λ est un diviseur de 24.

2. c. On a fait la conjecture que la matrice A possède trois valeurs propres *entières* λ_1, λ_2 et λ_3 et on sait (propriété du déterminant) que

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -24.$$

Si la plus petite racine (en valeur absolue) de χ_A est supérieure à 3, alors

$$24 = |\lambda_1| \times |\lambda_2| \times |\lambda_3| \geqslant 3 \times 3 \times 3 = 27$$

ce qui est clairement absurde. Comme les λ_k sont des *entiers*, on en déduit que

$$\min\big\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\big\} = 1 \text{ ou } 2.$$

❧ *Si notre conjecture est juste*, il suffit de vérifier si quels entiers parmi ± 1 et ± 2 sont valeurs propres de A. Connaissant une première valeur propre, on en déduit une factorisation de χ_A comme produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2. La fin de la factorisation est alors un jeu d'enfant. (OK, un grand enfant.)

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, d'après la règle de Sarrus,

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)^3 - 9(1-\lambda) - 16(1-\lambda) \qquad \text{(Surtout, ne pas développer !)}\\ &= (1-\lambda)\big[(1-\lambda)^2 - 25\big]\\ &= (1-\lambda)\big[(1-\lambda) - 5\big]\big[(1-\lambda)+5\big]\\ &= (1-\lambda)(-\lambda-4)(-\lambda+6).\end{aligned}$$

Comme 3 est impair et que $\mathbb{R}$ est infini, on en déduit que

$$\chi_A = (X-1)(X+4)(X-6).$$

4. D'après la question précédente, les valeurs propres de A sont

$$a = -4, \quad b = 1 \quad \text{et} \quad c = 6.$$

4. a. Comme la matrice A possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ses trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles : il suffit de connaître un vecteur propre pour chaque sous-espace propre pour en déduire une base de vecteurs propres.

❧ Pour $\lambda = -4$: les colonnes de la matrice

$$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

vérifient $4C_1 - 3C_3 = 0$, donc le sous-espace propre associé à $a = -4$ est la droite dirigée par le vecteur $(4, 0, -3)$.

❧ Pour $\lambda = 1$: les colonnes de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0\\ 3 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

vérifient $-3C_1 + 5C_2 - 4C_3 = 0$, donc le sous-espace propre associé à $b = 1$ est la droite dirigée par le vecteur $(-3, 5, -4)$.

❧ Pour $\lambda = 6$: les colonnes de la matrice

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

vérifient $3C_1 + 5C_2 + 4C_3 = 0$, donc le sous-espace propre associé $c = 6$ est la droite dirigée par le vecteur $(3, 5, 4)$.

4. b. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants, donc les trois vecteurs propres trouvés à la question précédente constituent une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

est inversible. Comme les colonnes de Q sont des vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres -4, 1 et 6, la formule de changement de base prouve que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(-4, 1, 6).$$

5. a. Par construction,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

5. b. Comme la matrice A est diagonalisable, la matrice colonne X_0 (et n'importe quelle matrice colonne en général) peut se décomposer sous la forme

$$X_0 = U_1 + U_2 + U_3$$

où les colonnes U_1, U_2 et U_3 appartiennent respectivement aux sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres -4, 1 et 6.

On en déduit que

$$A^n X_0 = A^n U_1 + A^n U_2 + A^n U_3$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} X_n &= (-4)^n U_1 + 1^n U_2 + 6^n U_3 \\ &= (-4)^n U_1 + U_2 + 6^n U_3 \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme on connaît les sous-espaces propres de A, on sait que

$$U_1 \propto \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad U_2 \propto \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad U_3 \propto \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où la relation $\propto$ signifie *est proportionnel à*.

❧ La question du calcul *explicite* des colonnes U_k reste en suspens : comment calculer les trois constantes de proportionnalité ?

On peut remarquer que

$$A = Q\,\mathrm{Diag}(-4, 1, 6)Q^{-1}$$

en déduire que

$$\begin{aligned} A^n &= Q\,\mathrm{Diag}\big((-4)^n, 1, 6^n\big)Q^{-1} \\ &= (-4)^n \cdot Q\,\mathrm{Diag}(1, 0, 0)Q^{-1} \\ &\quad + Q\,\mathrm{Diag}(0, 1, 0)Q^{-1} \\ &\quad + 6^n \cdot Q\,\mathrm{Diag}(0, 0, 1)Q^{-1} \end{aligned}$$

et enfin que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (-4)^n U_1 + U_2 + 6^n U_3$$

avec

$$U_1 = Q\,\mathrm{Diag}(1,0,0)Q^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}X_0,$$
$$U_2 = Q\,\mathrm{Diag}(0,1,0)Q^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}X_0,$$
$$U_3 = Q\,\mathrm{Diag}(0,0,1)Q^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^{-1}X_0.$$

On peut mettre en application ce qui précède.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A = np.matrix([[1,3,0], [3,1,4], [0,4,1]])
Q = np.matrix([[-3,4,3], [5,0,5], [-4,-3,4]])
al.det(Q)
```

Le déterminant de Q est égal à -250. On déduit alors des formules de Cramer que $250Q^{-1}$ est une matrice à coefficients *entiers*. En regardant le résultat des calculs, on constate que les coefficients de $250Q^{-1}$ sont tous des multiples de 5. On effectue alors

```
Q2 = np.matrix(50*P**(-1), dtype=np.int32)
```

(on calcule une matrice dont les coefficients sont des flottants et on les convertit en entiers en imposant la valeur de `dtype`) et on en déduit que

$$50Q^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 8 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Oui, c'est presque la transposée de Q parce que Q est presque une matrice orthogonale : ses colonnes forment une base orthogonale – mais pas une base orthonormée.)

On définit la colonne initiale (sous forme de tableau unidimensionnel, qu'on convertit en matrice colonne à l'aide de `reshape`).

```
X0 = np.matrix([1,0,1]).reshape(3,1)
```

On applique ensuite les formules établies plus haut, sans oublier que les valeurs retournées sont égales à 50 fois les valeurs cherchées !

```
for D in [[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]]:
    U = Q*np.diag(D)*Q2*X0
    print(U)
```

On en déduit que

$$U_1 = \frac{7}{50}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad U_2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad U_3 = \frac{7}{50}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où on reconnaît bien des vecteurs propres de la matrice A.