Problème de Mathématiques

Référence pp1813 — Version du 6 décembre 2025

On étudie ici la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partie A. Polynômes annulateurs

1. On calcule le polynôme minimal de A.

1. a. En vérifiant que
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
démontrer que la famille (I_3, A, A^2) est libre.

1. b. Exprimer A^3 en fonction de I_3, A et A^2.

1. c. En déduire le polynôme minimal de A.

2. Démontrer que
$$F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$$
est un espace vectoriel de dimension 3 et qu'il est stable par produit.

3. a. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

3. b. Comparer χ_A au polynôme minimal de A.

Partie B. Diagonalisation

On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A et on considère les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique par les matrices colonnes suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de u.

5. Expliciter une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Démontrer que
$$Q^{-1}P(A)Q = \begin{pmatrix} P(0) & 0 & 0 \\ 0 & P(-1) & 0 \\ 0 & 0 & P(-3) \end{pmatrix}$$
pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

7. On considère les trois matrices suivantes.
$$B_1 = Q\,\mathrm{Diag}(1,0,0)Q^{-1}$$
$$B_2 = Q\,\mathrm{Diag}(0,1,0)Q^{-1}$$
$$B_3 = Q\,\mathrm{Diag}(0,0,1)Q^{-1}$$

On ne demande pas de calculer explicitement ces trois matrices.

7. a. Calculer $B_1 + B_2 + B_3$.

7. b. Calculer les produits B_iB_j en fonction des indices i et j.

7. c. Démontrer que
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = (-1)^n B_2 + (-3)^n B_3.$$
Cette relation est-elle encore vraie pour $n = 0$?

7. d. Démontrer que
$$F = \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3).$$

Partie C. Commutant de A

8. Soit $v \in L(E)$.

8. a. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si, et seulement si, les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 sont des vecteurs propres de v.

8. b. En déduire que $u \circ v = v \circ u$ si, et seulement si, il existe un polynôme P tel que

$$v = P(u) \quad \text{et} \quad \deg P \leqslant 2.$$

9. Quel est l'ensemble des matrices $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$?

Solution ❀ Réduction d'une matrice

Partie A. Polynômes annulateurs

1. a. Soient a, b et c, des réels tels que

$$aI_3 + bA + cA^2 = 0_3.$$

La matrice $aI_3 + bA + cA^2$, nulle, est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}$$

donc $c = 0$. Comme la matrice $aI_3 + bA + 0 \cdot A^2$, toujours nulle, est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ b & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

alors $b = 0$. Il reste seulement $aI_3 = 0_3$, donc $a = 0$. On a ainsi démontré que la famille (I_3, A, A^2) était libre.

1. b. On trouve (normalement sans difficulté)

$$A^3 = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -4 \\ 9 & -18 & 9 \\ -4 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

En comparant les coefficients situés à l'intersection de la troisième ligne et de la première colonne, on pense à former la matrice $A^3 + 4A^2$ et on observe alors que

$$A^3 = -4A^2 - 3A.$$

1. c. Le polynôme minimal de A est le polynôme unitaire annulateur de A de plus bas degré possible.

D'après **[1.a.]**, il n'existe aucun polynôme annulateur unitaire de degré inférieur à 2.

D'après **[1.b.]**, le polynôme unitaire

$$X^3 + 4X^2 + 3X = X(X+1)(X+3)$$

est un polynôme annulateur de A. C'est donc lui le polynôme minimal de A.

2. Par définition, F est le sous-espace de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I_3, A et A^2. Comme cette famille est libre d'après **[1.a.]**, c'est une *base* de F, donc la dimension de F est égale à 3.

❧ Les matrices qui appartiennent à F sont des polynômes en A, donc le produit de deux matrices de F est encore un polynôme en A.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On peut diviser le polynôme P par le polynôme minimal de A : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = X(X+1)(X+3)Q + R \quad \text{et} \quad \deg R < 3.$$

En substituant A à X, on obtient alors

$$P(A) = R(A) \in \operatorname{Vect}(I_3, A, A^2) = F$$

puisque le polynôme minimal de A est un polynôme annulateur de A. On en déduit que tout polynôme en A appartient à F et donc que F est stable par produit.

REMARQUE.— Le sous-espace F est en fait une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{(opération de pivot } L_2 \leftarrow L_2 + L_1 + L_3\text{)} \\
&= (-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{(on factorise } L_2 \text{ par } (-\lambda)\text{)} \\
&= (-\lambda)\big[(1+\lambda)(1+\lambda+1) + (1+\lambda)\big] && \text{(développement par la première ligne)} \\
&= (-\lambda)(1+\lambda)(3+\lambda).
\end{aligned}$$

Comme 3 est impair,

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(\lambda) = -\det(A - \lambda I_3) = \lambda(1+\lambda)(3+\lambda)$$

et comme $\mathbb{R}$ est infini, on en déduit enfin que

$$\chi_A = X(X+1)(X+3)\ldots$$

3. b. ... et en particulier que le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal.

Partie B. Diagonalisation

4. On vérifie très facilement que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Comme ces matrices colonnes ne sont pas nulles, on a ainsi démontré que ε_1, ε_2 et ε_3 sont des vecteurs propres de u.

Comme ces vecteurs propres sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (0, -1 et -3), ils forment une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et donc une *base* de $\mathbb{R}^3$.

5. **Analyse.** On doit savoir que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(0, -1, -3)$$

si, et seulement si, la matrice Q est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de u, respectivement associés aux valeurs propres 0, -1 et -3.

Synthèse. D'après la question précédente, la matrice de passage de la base canonique à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ convient. La matrice

$$Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

est donc une matrice inversible telle que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(0, -1, -3).$$

6. On sait que

$$\forall\,k \in \mathbb{N}, \quad (Q^{-1}AQ)^k = Q^{-1}(A^k)Q$$

et comme $Q^{-1}AQ$ est diagonale, on sait que

$$\forall\,k \in \mathbb{N}, \quad (Q^{-1}AQ)^k = \operatorname{Diag}(0^k, (-1)^k, (-3)^k).$$

On en déduit par combinaison linéaire que

$$Q^{-1}P(A)Q = \operatorname{Diag}\big(P(0), P(-1), P(-3)\big)$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

7. a. Comme

$$\operatorname{Diag}(1,0,0) + \operatorname{Diag}(0,1,0) + \operatorname{Diag}(0,0,1) = I_3,$$

alors

$$B_1 + B_2 + B_3 = Q^{-1}I_3Q = I_3.$$

7. b. On *doit savoir* que

$$(QM_1Q^{-1}) \times (QM_2Q^{-1}) = Q(M_1 \times M_2)Q^{-1}$$

quelles que soient les matrices M_1 et M_2.

❧ Il est clair que
$$\mathrm{Diag}(1,0,0)^2 = \mathrm{Diag}(1,0,0).$$
Par conséquent,
$$B_1^2 = Q\,\mathrm{Diag}(1,0,0)Q^{-1} = B$$
et, de même, $B_2^2 = B_2$ et $B_3^2 = B_3$.
❧ Il est tout aussi clair que
$$\mathrm{Diag}(1,0,0) \times \mathrm{Diag}(0,1,0) = \mathrm{Diag}(1 \times 0, 0 \times 1, 0) = 0_3.$$
Par conséquent,
$$B_1B_2 = Q \times 0_3 \times Q^{-1} = 0_3$$
et, de même,
$$\forall\, i \neq j, \quad B_iB_j = 0_3.$$
7. c. On applique **[6.]** au monôme $P = X^n$:
$$\begin{aligned} Q^{-1}A^nQ &= \mathrm{Diag}\big(0^n, (-1)^n, (-3)^n\big) \\ &= (-1)^n\,\mathrm{Diag}(0,1,0) + (-3)^n\,\mathrm{Diag}(0,0,1) \end{aligned}$$
car $n \geqslant 1$. En multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}, on en déduit que
$$A^n = (-1)^nB_2 + (-3)^nB_3.$$
❧ Cette relation est *fausse* pour $n = 0$:
$$\begin{aligned} A^0 = I_3 &= B_1 + B_2 + B_3 \\ &\neq B_2 + B_3 = (-1)^0B_2 + (-3)^0B_3. \end{aligned}$$
En revanche, la relation
$$A^n = 0^nB_1 + (-1)^nB_2 + (-3)^nB_3$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, y compris $n = 0$.
7. d. D'après **[7.a.]** et **[7.c.]**, les matrices I_3, A et A^2 sont des combinaisons linéaires de B_1, B_2 et B_3, donc
$$F \subset \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3).$$
En particulier, $\dim F \leqslant \dim \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3)$. Or $\dim F = 3$ par **[2.]** et $\dim \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) \leqslant 3$ (la dimension est majorée par le cardinal d'une famille génératrice), donc
$$\dim \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) = 3$$
et $F = \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3)$ (inclusion des sous-espaces et égalité des dimensions).
REMARQUE.— On peut aussi exploiter le résultat du **[6.]** En notant L_1, L_2 et L_3, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, -1 et -3, on déduit de **[6.]** que
$$\begin{aligned} L_1(A) &= Q\,\mathrm{Diag}\big(L_1(0), L_1(-1), L_1(-3)\big)Q^{-1} = B_1 \\ L_2(A) &= Q\,\mathrm{Diag}\big(L_2(0), L_2(-1), L_2(-3)\big)Q^{-1} = B_2 \\ L_3(A) &= Q\,\mathrm{Diag}\big(L_3(0), L_3(-1), L_3(-3)\big)Q^{-1} = B_3 \end{aligned}$$
et comme tous les polynômes en A appartiennent à F d'après **[2.]**, on en déduit que les matrices B_1, B_2 et B_3 appartiennent à F et donc que
$$\mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) \subset F.$$
REMARQUE.— Comme les matrices
$$\mathrm{Diag}(1,0,0), \quad \mathrm{Diag}(0,1,0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Diag}(0,0,1)$$
sont linéairement indépendantes (de façon évidente !) et que l'application $\big[M \mapsto QMQ^{-1}\big]$ est injective, les matrices B_1, B_2 et B_3 sont aussi linéairement indépendantes, ce qui donne une nouvelle preuve de l'égalité
$$\dim \mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) = \dim F$$
et donc une troisième manière de conclure.

Partie C. Commutant de A

8. a. On sait depuis **[4.]** que

$$u(\varepsilon_1) = 0 \cdot \varepsilon_1, \quad u(\varepsilon_2) = (-1) \cdot \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_3) = (-3) \cdot \varepsilon_3.$$

❧ Supposons que ε_1, ε_2 et ε_3 soient trois vecteurs propres de v :

$$v(\varepsilon_1) = \lambda_1 \cdot \varepsilon_1, \quad v(\varepsilon_2) = \lambda_2 \cdot \varepsilon_2, \quad v(\varepsilon_3) = \lambda_3 \cdot \varepsilon_3.$$

On a alors

$$(u \circ v)(\varepsilon_1) = u(\lambda_1 \cdot \varepsilon_1) = (\lambda_1 \times 0) \cdot \varepsilon_1 = 0_E$$

tandis que

$$(v \circ u)(\varepsilon_1) = v(0_E) = 0_E.$$

De même,

$$(u \circ v)(\varepsilon_2) = (v \circ u)(\varepsilon_2) = (-\lambda_2) \cdot \varepsilon_2$$
$$(u \circ v)(\varepsilon_3) = (v \circ u)(\varepsilon_3) = (-3\lambda_3) \cdot \varepsilon_3.$$

Les applications *linéaires* $(u \circ v)$ et $(v \circ u)$ sont égales sur la *base* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, donc elles sont égales *partout* :

$$\forall\, x \in E, \quad (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$$

c'est-à-dire $(u \circ v) = (v \circ u)$.

❧ Réciproquement, supposons que $(u \circ v) = (v \circ u)$.

Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre α, alors

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot v(x)$$

donc le vecteur $v(x)$ appartient au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \alpha\, I_E)$. Or les trois sous-espaces propres de u sont des *droites* vectorielles, respectivement dirigées par ε_1, ε_2 et ε_3. Par conséquent, le vecteur x dirige le sous-espace propre auquel il appartient et $v(x)$ est proportionnel à x, ce qui prouve que x est bien un vecteur propre de v.

On en déduit que ε_1, ε_2 et ε_3 sont trois vecteurs propres de v.

❧ Conclusion : les endomorphismes u et v commutent si, et seulement si, les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 sont des vecteurs propres de v.

8. b. On *sait* que la sous-algèbre des polynômes en u est commutative. Par conséquent, s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ dont le degré est inférieur à 2 et tel que $v = P(u)$, alors u et v commutent.

❧ Réciproquement, supposons que u et v commutent.

Notons B, la matrice de v relative à la base canonique. D'après **[5.]** et **[8.a.]**, les endomorphismes u et v commutent si, et seulement si, la matrice de v relative à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est diagonale, c'est-à-dire s'il existe trois réels α_1, α_2 et α_3 tels que

$$Q^{-1}BQ = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

D'après **[6.]** et la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange, il existe un, et un seul, polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P(0) = \alpha_1, \quad P(-1) = \alpha_2 \quad \text{et} \quad P(-3) = \alpha_3$$

(*rappel* : le degré de P peut être choisi inférieur à n quand on interpole sur $(n+1)$ points) et donc tel que

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}BQ.$$

En multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}, on en déduit que $B = P(A)$ et donc que $v = P(u)$.

9. D'après la question précédente, la matrice B commute à la matrice A si, et seulement si, B est une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.

L'ensemble des matrices B telles que $AB = BA$ est donc la sous-algèbre F.