Problème de Mathématiques

Référence pp1825 — Version du 6 décembre 2025

Étant données une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de réels *non nuls* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit les matrices

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note P_n, le polynôme caractéristique de A_n.

1. Établir une relation de récurrence entre les polynômes P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.

2. a. Démontrer que la matrice A_n est diagonalisable.

2. b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A_n. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & & & \\ \lambda - a_2 & -b_2 & & \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -b_{n-2} \\ & & -b_{n-2} \quad \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

extraite de la matrice $\lambda I_n - A_n$ en supprimant la première colonne et la dernière ligne. (Les coefficients nuls sont sous-entendus.)

2. c. En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ lorsque λ est une valeur propre de A_n.

2. d. En déduire que le polynôme caractéristique P_n de A_n admet n racines réelles distinctes.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{vmatrix}.$$

3. a. Démontrer que : pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2\,\Delta_{n-1}(x).$$

3. b. Démontrer que $\Delta_1(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour $n \geqslant 2$.

4. Démontrer que la fonction polynomiale P_{n+1} s'annule entre deux racines consécutives de P_n.

☞ *On pourra considérer l'application*

$$f(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}.$$

Solution ❀ Matrices tridiagonales

1. En développant $P_{n+1}(\lambda)$ par la dernière colonne, on trouve :

$$(\lambda - a_{n+1})P_n(\lambda) + b_n \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -b_1 & & & & \\ -b_1 & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & & \\ & \ddots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} & \\ & & & -b_{n-1} & \lambda - a_n & -b_{n+1} \\ & & & & -b_n & \lambda - a_{n+1} \end{vmatrix}.$$

(Les coefficients nuls ne sont pas indiqués ; les coefficients en rouge sont situés sur la ligne et la colonne supprimées.)

En redéveloppant par la dernière colonne cette fois :

$$(\lambda - a_{n+1})P_n(\lambda) - b_n^2 \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -b_1 & & & \\ -b_1 & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & \\ & \ddots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ & & & & -b_n \end{vmatrix}$$

et finalement

$$P_{n+1}(\lambda) = (\lambda - a_{n+1})P_n(\lambda) - b_n^2 P_{n-1}(\lambda).$$

2. a. La matrice A_n est symétrique *réelle*, donc diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. b. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, donc le déterminant cherché est égal à

$$(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} b_k$$

et donc *non nul*, puisque tous les b_k sont différents de zéro.

2. c. Si λ est une valeur propre de A_n, alors la matrice $\lambda I_n - A_n$ n'est pas inversible, donc son rang est inférieur ou égal à $(n-1)$.

D'après la question précédente, les $(n-1)$ dernières colonnes de $\lambda I_n - A_n$ sont linéairement indépendantes, donc le rang de $\lambda I_n - A_n$ est supérieur ou égal à $(n-1)$.

Ainsi, le rang de $\lambda I_n - A_n$ est égal à $(n-1)$ et le sous-espace propre associé à λ est une droite vectorielle.

2. d. Les racines du polynôme caractéristique de A_n sont les valeurs propres de A_n.

Comme A_n est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles, la matrice A_n possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

Par conséquent, son polynôme caractéristique admet n racines réelles distinctes.

3. a. D'après la relation de récurrence du **[1.]**,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad P'_{n+1} = (X - a_{n+1})P'_n + P_n - b_n^2 P'_{n-1}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) =& (x - a_{n+1})P'_n(x)P_n(x) + P_n^2(x) \\ & - b_n^2 P_n(x)P'_{n-1}(x) \\ & - P'_n(x)\big[(x - a_{n+1})P_n(x) - b_n^2 P_{n-1}(x)\big] \\ =& P_n^2(x) + b_n^2\big[P'_n(x)P_{n-1}(x) - P_n(x)P'_{n-1}(x)\big] \\ =& P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x). \end{aligned}$$

3. b. On trouve facilement :

$$\begin{aligned} P_1 &= X - a_1, \\ P_2 &= X^2 - (a_1 + a_2)X + a_1 a_2 - b_1^2. \end{aligned}$$

On en déduit que
$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 2x-(a_1+a_2) & 1 \\ P_2(x) & P_1(x) \end{vmatrix} = (x-a_1)^2 + b_1^2.$$
Comme le réel b_1 n'est pas nul, le déterminant $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La relation de récurrence établie à la question précédente montre clairement que la suite de terme général $\Delta_n(x)$ est croissante. Comme $\Delta_1(x) > 0$, on en déduit que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Delta_n(x) > 0.$$

4. Soient $a < b$, deux racines consécutives de P_n. On a donc $P_n(a) = P_n(b) = 0$ et comme $\Delta_n(a) > 0$ et $\Delta_n(b) > 0$, alors $P_{n+1}(a) \neq 0$ et $P_{n+1}(b) \neq 0$.

Par conséquent, le quotient f tend vers l'infini au voisinage de a et au voisinage de b (le numérateur tend vers une limite non nulle pendant que le dénominateur tend vers 0).

Plus précisément, sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée, égale à
$$\frac{\Delta_n(x)}{P_n^2(x)},$$
est strictement positive sur $]a, b[$. Par conséquent, le quotient f est strictement croissant sur $]a, b[$, ce qui prouve que
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty.$$
Comme f est continue de l'intervalle $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle change de signe sur cet intervalle, elle s'annule entre a et b (Théorème des valeurs intermédiaires).