Problème de Mathématiques

Référence pp1912 — Version du 6 décembre 2025

Dans ce sujet, on étudie la matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

ainsi que diverses matrices rattachées à M.

1. Démontrer les égalités suivantes.

1. a. $j^4 = j$

1. b. $j^2 = \bar{j} = j^{-1}$

1. c. $j + j^2 = -1$

1. d. $1 + 2j = j - j^2 = i\sqrt{3}$

Partie A. Réduction de M

2. a. Vérifier que

$$\det(M - tI_3) = -3i\sqrt{3} + 3t + i\sqrt{3}t^2 - t^3$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. b. En déduire le polynôme caractéristique χ_0 de la matrice M.

2. c. Le polynôme χ_0 admet-il des racines réelles ?

2. d. En déduire la factorisation de χ_0 en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Vérifier que $(j - j^2)$ est une valeur propre de M et caractériser le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

4. Soit λ, une valeur propre *réelle* de M et

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$$

un vecteur propre de M associé à λ.

4. a. Que vaut λ^2 ? En déduire que

$$\frac{-1}{1-\lambda} = \frac{1+\lambda}{2}.$$

4. b. Vérifier que les coordonnées de X vérifient le système suivant.

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + & y + & z = 0 \\ & (1+2j-\lambda)y + & (1+2j^2+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

4. c. En déduire que $y_0 = z_0$, puis que $x_0 = (1+\lambda)y_0$.

5. Calculer une matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que

$$Q = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6. Calculer le polynôme minimal μ_0 de M.

7. On note respectivement D_0, D_+ et D_-, les sous-espaces propres de M associés aux valeurs propres $i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

7. a. Démontrer que le sous-espace $P_0 = D_+ + D_-$ est un plan et calculer une équation cartésienne de ce plan.

7. b. Vérifier que les sous-espaces D_0 et P_0 sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et caractériser matriciellement la projection sur D_0 parallèlement à P_0.

Partie B. Étude de matrices associées à M

8. On note $M^* \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, la matrice conjuguée de M : les coefficients de M^* sont les conjugués des coefficients de M.

8. a. Comparer les polynômes annulateurs de M^* aux polynômes annulateurs de M.

8. b. En déduire le polynôme minimal de M^*, puis que M^* est diagonalisable.

8. c. Calculer $Q^{-1}M^*Q$, où la matrice Q est la matrice définie au **[5.]**

8. d. Calculer M^4.

9. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} M & 0_3 \\ 0_3 & M^* \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{C}).$$

9. a. Démontrer que

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(M) & 0_3 \\ 0_3 & P(M^*) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

9. b. En déduire le polynôme minimal de A.

9. c. Expliciter une matrice $Q_0 \in GL_6(\mathbb{C})$ telle que

$$Q_0^{-1}AQ_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

10. Démontrer, en faisant le moins de calculs possibles, que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et donner une matrice diagonale semblable à B.

11. On considère ici la matrice

$$C = \begin{pmatrix} M & I_3 \\ 0_3 & M \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{C}).$$

11. a. Calculer C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

11. b. En déduire que

$$P(C) = \begin{pmatrix} P(M) & P'(M) \\ 0_3 & P(M) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

11. c. La matrice C est-elle diagonalisable ?

Solution ❀ Réduction de matrices complexes

1. On doit reconnaître une racine cubique de l'unité :

$$j = e^{2i\pi/3}$$

qui vérifie donc $j^3 = 1$.
1. a. On en déduit que $j^4 = j$ en multipliant les deux membres de l'égalité par j.
1. b. Comme $j^2 \cdot j = 1$, on en déduit aussi que $j^2 = j^{-1}$. D'autre part, comme $|j| = 1$, alors $j^{-1} = \bar{j}$ puisque

$$\forall\, z \in \mathbb{U}, \quad z^{-1} = \bar{z}.$$

1. c. Il est clair que $j \neq 1$. D'après la formule de la somme géométrique,

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

1. d. D'après **[1.c.]**,

$$1 + 2j = (1 + j) + j = -j^2 + j$$

et d'après **[1.b.]**,

$$j - j^2 = j - \bar{j} = 2i\,\mathfrak{Im}(j) = i\sqrt{3}.$$

Partie A. Réduction de M

2. a. D'après **[1.a.]**,

$$\det(M - tI_3) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & j-t & j^2 \\ 1 & j^2 & \boxed{j-t} \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant avec la règle de Sarrus (puisqu'on ne cherche pas encore à factoriser le polynôme caractéristique) et on trouve :

$$(1-t)(j-t)^2 + 2j^2 - 2(j-t) - j^4(1-t).$$

On développe alors complètement l'expression et on l'ordonne selon les puissances de t :

$$-3(j - j^2) + [2 - (j + j^2)]t + (2j + 1)t^2 - t^3$$

c'est-à-dire (d'après **[1.c.]** et **[1.d.]**)

$$-3i\sqrt{3} + 3t + i\sqrt{3}t^2 - t^3.$$

2. b. On sait que $\chi_0 \in \mathbb{C}[X]$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\chi_0(t) = \det(tI_3 - M) &= (-1)^3 \det(M - tI_3) \\ &= t^3 - i\sqrt{3}t^2 - 3t + 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

Comme $\mathbb{R}$ est un ensemble *infini*, le Théorème d'identification des fonctions polynomiales implique que

$$\chi_0 = X^3 - i\sqrt{3}X^2 - 3X + 3i\sqrt{3}.$$

2. c. Un nombre $t \in \mathbb{R}$ est une racine de χ_0 si, et seulement si,

$$\chi_0(t) = 0 = \underbrace{(t^3 - 3t)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sqrt{3}(3 - t^2)}_{\in\mathbb{R}}$$

c'est-à-dire $t(t^2 - 3) = 3 - t^2 = 0$ (unicité de la représentation cartésienne d'un nombre complexe). Donc t est une racine réelle de χ_0 si, et seulement si, $t^2 = 3$ ou, autrement dit, les racines réelles de χ_0 sont $\pm\sqrt{3}$.
2. d. Comme $\deg \chi_0 = 3$, ce polynôme admet une troisième racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Le coefficient de degré 2 de χ_0 donne la somme des racines et cette somme est égale à

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} + \alpha = i\sqrt{3}$$

donc la troisième racine de χ_0 est égale à $i\sqrt{3}$.

REMARQUE.— Cela est confirmé par le coefficient constant, qui donne le produit des racines :

$$\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})\times\alpha = 3i\sqrt{3}.$$

❧ Comme χ_0 est un polynôme unitaire de degré 3 dont on connaît trois racines distinctes, on connaît sa factorisation :

$$\chi_0 = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-i\sqrt{3}).$$

3. D'après **[2.d.]** et **[1.d.]**, le complexe $j-j^2 = i\sqrt{3}$ est une valeur propre de M.

VARIANTE.— La matrice

$$M-(j-j^2)I_3 = \begin{pmatrix} 1-j+j^2 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j^2\\ 1 & j^2 & j^2\end{pmatrix}$$

n'est pas inversible puisque $C_2 - C_3 = 0$. $(\star)$

❧ D'après **[2.d.]**, les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles et la relation $(\star)$ montre que la colonne

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de M associé à $(j-j^2)$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}\big(M-(j-j^2)I_3\big) = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

4. a. D'après **[2.c.]**, on a $\lambda^2 = 3$ et donc

$$\frac{-1}{1-\lambda} = \frac{-(1+\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{-(1+\lambda)}{1-\lambda^2} = \frac{1+\lambda}{2}.$$

(On nous prie d'annoncer le retour parmi nous de la quantité conjuguée.)

REMARQUE.— À retenir : il est beaucoup plus simple d'utiliser l'égalité $\lambda^2 = 3$ que de calculer avec une valeur particulière de λ...

4. b. Comme X appartient à $\operatorname{Ker}(M-\lambda I_3)$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0\\ x & + & (j-\lambda)y & + & j^2 z & = & 0\\ x & + & j^2 y & + & (j-\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

En effectuant les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{1-\lambda}L_1 \quad\text{et}\quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{1-\lambda}L_1$$

on en déduit (avec l'aide de **[4.a.]**) que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0\\ & & (j+\frac{1-\lambda}{2})y & + & (j^2+\frac{1+\lambda}{2})z & = & 0\\ & & (j^2+\frac{1+\lambda}{2})y & + & (j+\frac{1-\lambda}{2})z & = & 0\end{array}\right.$$

Avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et en se débarrassant de la dernière équation, on aboutit à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0\\ & & (j-j^2-\lambda)y & + & (j^2-j+\lambda)z & = & 0\end{array}\right.$$

4. c. Or $j-j^2-\lambda = 1+2j-\lambda$ par **[1.d.]** et $j^2-j+\lambda = 1+2j^2+\lambda$ par **[1.c.]** De plus,

$$(1+2j-\lambda)+(1+2j^2+\lambda) = 0$$

(encore par **[1.c.]**), ce qui permet de réécrire L_2 sous la forme

$$\underbrace{(1+2j-\lambda)}_{\neq 0}(y-z) = 0$$

ce qui prouve que $y_0 = z_0$. On peut alors déduire de L_1 et de **[4.a.]** que

$$x_0 = \frac{-1}{1-\lambda}(2y_0) = (1+\lambda)y_0.$$

5. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbb{R} = \{\pm\sqrt{3}\}$, on pose

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

en s'inspirant de **[4.c.]** D'après **[4.a.]** et **[1.c.]**,

$$(M - \lambda I_3)X_\lambda = \begin{pmatrix} (1-\lambda^2)+1+1 \\ (1+\lambda)+(j-\lambda)+j^2 \\ (1+\lambda)+j^2+(j-\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

ce qui prouve que X_λ est bien un vecteur propre de M associé à λ.

Comme les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles d'après **[2.d.]**, on en déduit que

$$\forall\, \lambda \in \{\pm\sqrt{3}\}, \quad \mathrm{Ker}(M - \lambda I_3) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ D'après **[3.]**, $\mathrm{Ker}(M - i\sqrt{3}I_3) = \mathbb{C} \cdot X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ Avec trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, on dispose d'une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, donc la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} X_{\sqrt{3}} & X_{-\sqrt{3}} & X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3})$$

puisque les colonnes de Q sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$.

6. Depuis **[2.d.]**, on sait que χ_0 est scindé à racines simples et donc que M est diagonalisable. Par conséquent,

$$\mu_0 = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda) = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - i\sqrt{3})$$

et en particulier $\mu_0 = \chi_0$.

7. a. Les droites D_+ et D_- sont des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elles sont en somme directe et donc

$$\dim P_0 = \dim(D_+ \oplus D_-) = \dim D_+ + \dim D_- = 2.$$

Le sous-espace P_0 est bien un plan vectoriel.

❧ Par **[5.]**, P_0 est engendré par $X_{\sqrt{3}}$ et $X_{-\sqrt{3}}$. Comme

$$X_{\sqrt{3}} \wedge X_{-\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1+\lambda) \\ (1+\lambda) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le plan P_0 est représenté par l'équation cartésienne

$$-y + z = 0$$

relativement à la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

REMARQUE.— Il faut **toujours préciser** dans quelle base on calcule une équation cartésienne ! Comme l'énoncé n'impose rien, un taupin facétieux aurait pu calculer dans la base de vecteurs propres $(X_{\sqrt{3}}, X_{-\sqrt{3}}, X_0)$... (Dans cette base, le plan P_0 est évidemment représenté par l'équation cartésienne $Z = 0$.)

7. b. D'après **[3.]** et **[5.]**, la droite D_0 est dirigée par le vecteur X_0. Ce vecteur X_0 n'appartient pas au plan P_0 d'après **[7.a.]**, donc le plan P_0 et la droite D_0 sont en somme directe et

$$\dim(P_0 \oplus D_0) = \dim P_0 + \dim D_0 = 3$$

ce qui prouve que P_0 et D_0 sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$D_0 \oplus P_0 = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

❧ Pour tout vecteur $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in D_0} + \begin{pmatrix} x \\ y+\alpha \\ z-\alpha \end{pmatrix}.$$

D'après **[7.a.]**, le second terme appartient au plan P_0 si, et seulement si,

$$(y+\alpha) - (z-\alpha) = 0$$

c'est-à-dire $\alpha = (y-z)/2$. Ainsi, le projeté de X sur D_0 parallèlement à P_0 est le vecteur

$$\frac{y-z}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de cette projection **relative à la base canonique de** $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est donc

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Bien entendu, la matrice de cette projection relative à la base de vecteurs propres qu'on a choisie au **[5.]** est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mais cela n'a pas grand intérêt).

Partie B. Étude de matrices associées à M

8. a. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de forme développée

$$P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k,$$

on pose

$$P^* = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k^* X^k$$

où α_k^* désigne le conjugué de $\alpha_k \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} \left[P(M)\right]^* &= \left[\sum_{k=0}^{d} \alpha^k M^k\right]^* = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k^* (M^*)^k \\ &= P^*(M^*) \end{aligned}$$

puisque, de façon évidente, $(M^*)^k = (M^k)^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme la matrice nulle est égale à sa conjuguée, on en déduit que

$$P(M) = 0_n \iff P^*(M^*) = 0_n.$$

8. b. En particulier, d'après **[8.a.]**, le polynôme μ_0^* est un polynôme annulateur unitaire de M^* (en tant que conjugué d'un polynôme annulateur unitaire de M) et est donc divisible par le polynôme minimal μ_1 de M^*. Réciproquement, pour les mêmes raisons, le polynôme μ_1^* est un polynôme annulateur unitaire de M et est donc divisible par μ_0. On en déduit que

$$\deg \mu_0 = \deg \mu_1$$

et finalement que

$$\mu_1 = \mu_0^* = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X + i\sqrt{3})$$

d'après **[6.]**

❧ Comme le polynôme minimal μ_1 de M^* est scindé à racines simples, la matrice M^* est diagonalisable.

8. c. On reprend les notations du **[5.]** pour les colonnes de la matrice Q.

❧ Pour $\lambda = \pm\sqrt{3}$, comme la valeur propre λ et le vecteur propre X_λ sont *réels*,

$$M^* X_\lambda = M^* X_\lambda^* = (MX_\lambda)^* = (\lambda X_\lambda)^* = \lambda X_\lambda.$$

Comme le vecteur propre X_0 est *réel*, associé à une valeur propre *imaginaire pure*,

$$M^* X_0 = (MX_0)^* = (i\sqrt{3}X_0)^* = -i\sqrt{3}X_0.$$

❧ Les calculs précédents montrent que $(X_{\sqrt{3}}, X_{-\sqrt{3}}, X_0)$ est une base de vecteurs propres de M^* et par conséquent que

$$Q^{-1}M^*Q = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

VARIANTE.— Comme les matrices Q et Q^{-1} sont *réelles*,

$$Q^{-1}M^*Q = (Q^{-1}MQ)^*.$$

8. d. Au moins trois méthodes ! Il suffit bien sûr d'en exposer une seule...

❧ D'après **[5.]**,

$$Q^{-1}M^4Q = (Q^{-1}MQ)^4 = 9I_3$$

et par suite $M^4 = Q(9I_3)Q^{-1} = 9I_3$.

❧ Un calcul direct montre que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc que $M^4 = (M^2)^2 = 9I_3$.

❧ Dernière variante, la plus longue ici, mais aussi la plus susceptible d'être généralisée : d'après **[2.b.]** et **[6.]** (ou le théorème de Cayley-Hamilton),

$$M^3 = i\sqrt{3}M^2 + 3M - 3i\sqrt{3}I_3$$

et donc

$$\begin{aligned} M^4 &= i\sqrt{3}M^3 + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M \\ &= i\sqrt{3}\big[i\sqrt{3}M^2 + 3M - 3i\sqrt{3}I_3\big] + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M \\ &= -3M^2 + 3i\sqrt{3}M + 9I_3 + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M \\ &= 9I_3. \end{aligned}$$

9. a. Comme la matrice A est diagonale par blocs,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} M^k & 0_3 \\ 0_3 & (M^*)^k \end{pmatrix}$$

et par combinaison linéaire,

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha^k A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k M^k & 0_3 \\ 0_3 & \sum_{k=0}^{d} \alpha_k (M^*)^k \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A) = \begin{pmatrix} P(M) & 0_3 \\ 0_3 & P(M^*) \end{pmatrix}.$$

9. b. D'après la question précédente, P est un polynôme annulateur de A si, et seulement si, P est un polynôme annulateur de M *et* un polynôme annulateur de M^*. L'idéal annulateur de A est donc l'intersection des idéaux annulateurs de M et de M^* :

$$\mathscr{I}_A = \mathscr{I}_M \cap \mathscr{I}_{M^*} = \langle \mu_0 \rangle \cap \langle \mu_0^* \rangle$$

(d'après **[8.b.]**). Par conséquent, le polynôme minimal de A (= le générateur unitaire de l'idéal $\mathscr{I}_A$) est le ppcm de μ_0 et de μ_0^* et donc

$$\mu_A = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X + i\sqrt{3}).$$

9. c. Comme le polynôme minimal μ_A est scindé à racines simples, la matrice A est bien diagonalisable. Les calculs du **[8.c.]** vont nous permettre de préciser cela !

❧ Comme la matrice Q est inversible, il est clair que la matrice

$$Q_0 = \begin{pmatrix} X_{\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_{-\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_0 & 0_{3,1} \\ 0_{3,1} & X_{\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_{-\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_0 \end{pmatrix}$$

appartient à $GL_6(\mathbb{C})$.

❧ D'autre part, pour $\lambda = \pm\sqrt{3}$,

$$A \begin{pmatrix} X_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MX_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} X_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix}$$

et

$$A \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ M^*X_\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_\lambda \end{pmatrix}$$

et de même

$$A \begin{pmatrix} X_0 \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = i\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_0 \end{pmatrix} = -i\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que les colonnes de Q_0 sont des vecteurs propres de A. Par conséquent,

$$Q_0^{-1} A Q_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

10. D'après **[1.c.]**, on a

$$B = M + M^*.$$

D'après **[5.]** et **[8.c.]**,

$$\begin{aligned} Q^{-1}BQ &= Q^{-1}MQ + Q^{-1}M^*Q \\ &= \mathrm{Diag}(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0). \end{aligned}$$

11. a. Après quelques tâtonnements (qu'on réserve au brouillon), on finit par conjecturer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad C^k = \begin{pmatrix} M^k & kM^{k-1} \\ 0_3 & M^k \end{pmatrix},$$

conjecture qu'on démontre facilement (mais soigneusement...) par récurrence sur la copie.

11. b. L'expression précédente de C^k est encore valable pour $k = 0$ au sens où :

$$C^0 = I_6 = \begin{pmatrix} M^0 & 0_3 \\ 0_3 & M^0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, par combinaison linéaire comme au **[9.a.]**,

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(C) = \begin{pmatrix} P(M) & P'(M) \\ 0_3 & P(M) \end{pmatrix}.$$

11. c. On déduit de la question précédente que : si P est un polynôme annulateur de C, alors P et P' sont des polynômes annulateurs de M. Donc les valeurs propres de M sont des racines de P et de P'. En particulier, les valeurs propres de M sont des racines *doubles* du polynôme minimal de C.

Comme le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable est scindé à racines simples, on vient de prouver que la matrice C n'est pas diagonalisable.