# Problème de Mathématiques

Référence pp1920 — Version du 6 décembre 2025

---

Dans ce sujet, $n$ est un entier supérieur à 2 et on s'intéresse, sur divers exemples, à la réduction de matrices du type

$$\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre réels non tous nuls.

*On rappelle d'une part que :* si $A$ et $B$ sont deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$ et que

$$\forall\, T \in \mathbb{R}[X], \quad T(A) = P^{-1}T(B)P.$$

*On rappelle d'autre part que :*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \det A \times \det C$$

quelles que soient les matrices $A$, $B$ et $C$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

## Partie A. Préliminaire

On considère ici une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $u$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que $M$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de $M$ scindé à racines simples *(ce qui constitue un résultat bien connu du cours).*

**1.** On suppose qu'un vecteur $x \in E$ vérifie

$$u(x) = \lambda \cdot x$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\forall\, T \in \mathbb{R}[X], \qquad T(u)(x) = T(\lambda) \cdot x.$$

**2.** On suppose que $u$ est diagonalisable et on note

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$$

les valeurs propres (distinctes) de $u$. Démontrer que le polynôme

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$$

est un polynôme annulateur de $u$.

**3.** Réciproquement, on suppose que

$$Q = (X - \mu_1)(X - \mu_2) \cdots (X - \mu_r)$$

est un polynôme à racines simples (c'est-à-dire que les réels $\mu_k$ sont deux à deux distincts), annulateur de $u$. Démontrer que le spectre de $u$ est contenu dans l'ensemble

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$$

et, en appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, et que $u$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

**Partie B. Un premier exemple**

**4.** On suppose que

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

et une matrice diagonale D telles que

$$V = PDP^{-1}.$$

**NB :** On donnera $P^{-1}$ sans détailler le calcul de cette matrice.

**5.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la matrice par blocs

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$$

(où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ sont les coefficients de la matrice P définie à la question précédente).

Démontrer que la matrice Q est inversible, expliciter la matrice $Q^{-1}$ et démontrer que la matrice

$$W(A) = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

**6.** On suppose dans cette question que la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ : il existe donc une matrice inversible $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} \times B \times \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix}.$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $W(A)$ ?

**7.** On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent : on suppose donc que la matrice $W(A)$ est diagonalisable.

**7. a.** Soit $T \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme annulateur de $W(A)$. Calculer $T(A)$.

**7. b.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que la matrice $W(A)$ soit diagonalisable.

**Partie C. Un second exemple**

**8.** Démontrer que la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que

$$E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**9.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est semblable à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

**10.** On suppose que la matrice F est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**10. a.** Soit $U \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme annulateur de F, scindé à racines simples. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0_n & U(A) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est la matrice nulle.
**10. b.** Démontrer que les polynômes $U$ et $U'$ sont premiers entre eux. En déduire que la matrice $U'(A)$ est inversible.
**10. c.** Vérifier que le polynôme minimal de $A$ est $X$.
**11.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.
**12.** Exprimer le polynôme caractéristique de $F$ en fonction de celui de $A$. En déduire que $F$ est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $A$ est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
**13.** Donner un exemple de matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

ne soit pas trigonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

## Partie D. Applications

**14.** Soit $u$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux plans vectoriels stables par $u$.
☞ *On pourra s'inspirer de* ***[5.]***
**15.** En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $Q$ telles que

$$M = QDQ^{-1}.$$

**16.** Utiliser la question précédente pour résoudre le système différentiel suivant.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 4x_2(t) + 2x_4(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 4x_3(t) \\ x_4'(t) = 2x_2(t) + 4x_4(t) \end{cases}$$

**NB :** On ne portera pas les détails du calcul sur la copie.

# Solution ❀ Produit de Kronecker

## Partie A. Préliminaire

**1.** Par hypothèse,

$$u^1(x) = \lambda^1 \cdot x.$$

Si $u^n(x) = \lambda^n \cdot x$ pour un entier $n \geqslant 1$ [HR], alors

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x) &= u\big(u^n(x)\big) = u(\lambda^n \cdot x) = \lambda^n \cdot (\lambda \cdot x) \\ &= \lambda^{n+1} \cdot x. \end{aligned}$$

Et comme $u^0(x) = I(x) = x = 1 \cdot x = \lambda^0 \cdot x$, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n(x) = \lambda^n \cdot x.$$

❧ Le polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme

$$T = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T(u)(x) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot (\lambda^k \cdot x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right) \cdot x = T(\lambda) \cdot x. \end{aligned}$$

**2.** Si $u$ est diagonalisable, alors il existe une décomposition de $E$ en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$$

où $E_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k I_E)$ est le sous-espace propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda_k$.

❧ Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc une décomposition

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

avec $x_k \in E_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$. On en déduit que

$$P(u)(x) = \sum_{k=1}^{p} P(u)(x_k)$$

par linéarité de $P(u)$. D'après **[1.]**,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad P(u)(x_k) = P(\lambda_k) \cdot x_k$$

puisque $u(x_k) = \lambda_k \cdot x_k$ (par définition des $x_k$).

Or, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$,

$$P(\lambda_k) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_i) = 0$$

(à cause du facteur d'indice $i = k$) donc $P(u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que $P$ est bien un polynôme annulateur de $u$.

REMARQUE.— On peut aussi raisonner matriciellement, mais c'est plus délicat, car il faut changer de notations pour les valeurs propres (il y a $n$ coefficients sur la diagonale, certains des $\lambda_k$ pouvant apparaître plusieurs fois) : il existe une base dans laquelle $u$ est représenté par la matrice

$$D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

et, dans cette base, $P(u)$ est représenté par

$$P(D) = \mathrm{Diag}\big(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)\big) = 0_n$$

car chaque $\alpha_i$ est l'un des $\lambda_k$.

**3.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de $u$, et $x \in E$, un vecteur propre de $u$ associé à $\lambda$. En particulier, $x \neq 0_E$ (par définition même des vecteurs propres).

On a donc $u(x) = \lambda \cdot x$ et, d'après **[1.]**,

$$Q(u)(x) = Q(\lambda) \cdot x.$$

Comme $Q$ est un polynôme annulateur de $u$, on en déduit que

$$Q(\lambda) \cdot x = 0_E$$

et donc que $Q(\lambda) = 0$ puisque $x \neq 0_E$.

Toute valeur propre de $u$ est donc une racine de $Q$, donc

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}.$$

❧ Comme les scalaires $\mu_k$ sont deux à deux distincts, les facteurs $(X - \mu_k)$ sont deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le Théorème de décomposition des noyaux : comme $Q(u)$ est l'endomorphisme nul,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \mu_k I_E).$$

Si $\mu_k \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u - \mu_k I_E)$ est le sous-espace propre de $u$ associé à $\mu_k$ et sinon, $\mathrm{Ker}(u - \mu_k I_E) = \{0_E\}$. Ainsi,

$$E = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ \mu_k \in \mathrm{Sp}(u)}} \mathrm{Ker}(u - \mu_k I_E)$$

et comme $E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $u$, on en conclut que $u$ est diagonalisable.

**Partie B. Un premier exemple**

**4.** Comme $V \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est égal à

$$X^2 - (\mathrm{tr}\, V)X + \det V = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2).$$

La matrice $V \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

❧ Plus précisément, en écrivant

$$V - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

on voit apparaître les vecteurs propres de $V$.

❧ Comme des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, d'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}VP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(puisque $P^{-1}VP$ représente un endomorphisme $u$ dans une base constituée d'un premier vecteur propre associé à 1 et d'un second vecteur propre associé à 2).

❧ Les formules de Cramer donnent

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(et ce calcul se fait de tête).

REMARQUE.— On a le choix entre $D = \mathrm{Diag}(1,2)$ et $D = \mathrm{Diag}(2,1)$, il n'y a pas d'autre possibilité. En revanche, pour la matrice P, on peut remplacer chaque colonne par une colonne qui lui est proportionnelle et on peut intervertir les deux colonnes – ce qui revient à échanger les positions des valeurs propres dans la matrice D.

**5.** Il y a plusieurs manières de prouver que Q est inversible (rang, noyau, déterminant...), mais la plus efficace consiste à calculer directement son inverse, à condition d'être bien inspiré !

Par analogie avec $P^{-1}$, on pose le produit ci-dessous et on calcule par blocs.

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

On a ainsi démontré que la matrice Q était inversible et que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant des produits par blocs, on constate que la matrice $W(A)$ est diagonalisable par blocs.

$$Q^{-1}W(A)Q = \begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}$$

**6.** Encore des produits par blocs !

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R^{-1}A & 0_n \\ 0_n & 2R^{-1}A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0_n \\ 0_n & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix}^{-1},$$

donc le calcul précédent indique la matrice B est semblable à la matrice $\mathrm{Diag}(\Delta, 2\Delta)$, qui est diagonale (puisque $\Delta$ est diagonale). La matrice B est donc diagonalisable.

Comme $W(A)$ est semblable à B (question précédente), on en déduit enfin que $W(A)$ est diagonalisable.

**7. a.** D'après **[5.]**, les matrices $W(A)$ et B sont semblables. Par conséquent, quel que soit le polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$, les matrices $T(W(A))$ et $T(B)$ sont semblables (propriété rappelée au début de l'énoncé).

Si T est un polynôme annulateur de $W(A)$, alors $T(W(A)) = 0_{2n}$ et $T(B)$ est donc la matrice nulle. Mais comme B est diagonale par blocs, alors

$$T(B) = \begin{pmatrix} T(A) & 0_n \\ 0_n & T(2A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$$

et en particulier $T(A) = 0_n$.

**7. b.** Si $W(A)$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme T scindé à racines simples qui annule la matrice $W(A)$. D'après la question précédente, c'est aussi un polynôme annulateur de A et comme T est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

Réciproquement, on a démontré au **[6.]** que : si A est diagonalisable, alors $W(A)$ est aussi diagonalisable.

Par conséquent, $W(A)$ est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

## Partie C. Un second exemple

**8.** Comme $E \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est égal à

$$X^2 - (\operatorname{tr} E)X + \det E = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

Puisque le polynôme caractéristique de E est scindé, la matrice E est trigonalisable.

❧ Comme

$$E - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (E - I_2)^2 = 0_2,$$

la matrice $E - I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 2.

Choisissons donc $C_2 \notin \operatorname{Ker}(E - I_2)$, soit par exemple :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie rapidement que

$$EC_1 = C_1 \quad \text{et que} \quad EC_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot C_2 + (-2) \cdot C_1.$$

Donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible (ses deux colonnes ne sont pas proportionnelles) et

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**9.** On s'inspire du premier exemple pour construire la bonne matrice de passage à partir de la matrice $P$ calculée à la question précédente.

Comme

$$\begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n},$$

on peut poser

$$Q = \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

pour vérifier sans encombres que

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Q &= \begin{pmatrix} -2A & A \\ A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = F. \end{aligned}$$

La similitude cherchée est ainsi démontrée.

**10. a.** Supposons [HR] que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$$

pour un certain entier $k \geqslant 1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} F^{k+1} &= \begin{pmatrix} A^k & -2kA.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A.A^k \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et comme [HR] est évidemment vérifiée pour $k = 1$, on en conclut qu'elle est vérifiée pour tout entier $k \geqslant 1$.

Comme d'autre part il est clair que

$$F^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0_n \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix},$$

on a ainsi démontré que

$$P(F) = \begin{pmatrix} P(A) & -2A.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

lorsque $P$ parcourt la base canonique $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

La dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ étant linéaire, on en déduit par combinaisons linéaires que

$$P(F) = \begin{pmatrix} P(A) & -2A.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et en particulier pour $P = U$.

Mais $U$ est, par hypothèse, un polynôme annulateur de $F$, donc

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2A.U'(A) \\ 0_n & U(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

et en particulier $U(A) = 0_n$.

**10. b.** Par hypothèse, le polynôme $U$ est scindé à racines simples, donc tout diviseur non constant de $U$ est aussi scindé à racines simples.

Si $P_0$ est un diviseur non constant commun à $U$ et à $U'$, alors il possède au moins une racine réelle $\alpha$. Alors $\alpha$ est une racine commune à $U$ et à $U'$ et apparaît donc comme une racine *multiple* de $U$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Comme tout diviseur commun à $U$ et $U'$ est constant, ces deux polynômes sont premiers entre eux.

❧ D'après le Théorème de Bézout, il existe donc deux polynômes $T_0$ et $T_1$ tels que

$$T_0 U + T_1 U' = 1.$$

En substituant la matrice $A$ à l'indéterminée $X$, on en déduit que

$$I_n = T_0(A)U(A) + T_1(A)U'(A) = T_1(A)U'(A)$$

puisque $U$ est un polynôme annulateur de $A$ (d'après la question précédente). Cela prouve que la matrice $U(A)$ est inversible, d'inverse $T_1(A)$.

**10. c.** Par **[10.a.]**, le produit $AU'(A)$ est nul. Or la matrice $U'(A)$ est inversible d'après **[10.b.]**, donc $A = 0_n$. Cela prouve que $X$ est un polynôme annulateur unitaire de $A$ et comme le degré du polynôme minimal est au moins égal à 1, $X$ est bien le polynôme minimal de $A$.

**11.** Si la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, alors **[[9.]]** la matrice $F$ aussi est diagonalisable. Dans ces conditions, il existe bien un polynôme $U$ scindé à racines simples tel que $U(F) = 0_{2n}$ et d'après **[10.c.]** la matrice $A$ est nulle.

Réciproquement, si $A = 0_n$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = 0_{2n}$$

est diagonalisable, puisqu'elle est diagonale !

Conclusion : la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0_n$.

**12.** Comme la matrice $F$ est triangulaire par blocs,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & 2A \\ 0_n & \lambda I_n - A \end{vmatrix} = \big[\det(\lambda I_n - A)\big]^2$$

donc $\chi_F = (\chi_A)^2$.

On sait que : une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Donc : la matrice $F$ est donc trigonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique de $A$ est scindé.

**13.** D'après **[9.]**, la matrice $F$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix},$$

donc ces deux matrices ont même polynôme caractéristique.

En choisissant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(matrice d'un quart de tour : on est géométriquement sûr de n'avoir aucun vecteur propre!), on a $\chi_A = X^2 + 1$, donc F n'est pas trigonalisable et la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est égal à $(X^2+1)^2$, n'est pas trigonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

**Partie D. Applications**

**14.** On remarque que

$$M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On se trouve donc dans la situation du premier exemple avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons donc suivre pas à pas la démarche de la partie B.

Comme $\operatorname{tr} V = 2$ et $\det V = -3$, le polynôme caractéristique de V est égal à

$$X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1).$$

Avec

$$V - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut choisir la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie (comme on l'a déjà fait...) que

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul matriciel par blocs donne alors

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 3A & 0_2 \\ 0_2 & -A \end{pmatrix}.$$

Le fait d'obtenir une matrice diagonale par blocs signifie qu'on a en fait trouvé deux sous-espaces supplémentaires stables et ces sous-espaces stables sont des plans, puisque les blocs diagonaux appartiennent à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, si on interprète la matrice Q comme la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à une base

$$\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4),$$

la matrice $Q^{-1}MQ$ représente l'endomorphisme $u$ dans la base $\mathscr{B}_1$. Cela signifie que les plans

$$P_1 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad P_2 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

sont stables par $u$.

REMARQUE.— Si on n'a pas confiance dans les arguments théoriques précédents, on peut se lancer dans les calculs et appliquer la matrice M aux colonnes de la matrice de passage Q pour vérifier directement que les deux plans considérés sont stables par $u$.

Pour le plan $P_1$ :

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\9\\6\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pour le plan $P_2$ :

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$M\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\\2\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

**15.** On se trouve à nouveau dans la situation du premier exemple avec

$$M=\begin{pmatrix}4A&2A\\2A&4A\end{pmatrix},\quad A=I_2\quad\text{et}\quad V=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$\chi_V=X^2-8X+12=(X-2)(X-6).$$

On forme donc :

$$V-2I_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad V-6I_2=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}$$

ce qui conduit à choisir

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}I_2&I_2\\-I_2&I_2\end{pmatrix}.$$

Par choix de P, on a donc

$$P^{-1}VP=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$$

et, en reprenant les calculs du **[5.]**,

$$Q^{-1}MQ=\begin{pmatrix}2I_2&0_2\\0_2&6I_2\end{pmatrix}=\mathrm{Diag}(2,2,6,6),$$

ce qui prouve que M est bien diagonalisable.

**16.** En posant

$$X_t=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix},$$

on peut remarquer que le système différentiel à résoudre équivaut à

$$X_t'=MX_t.$$

On pose alors

$$Y_t=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\\y_4(t)\end{pmatrix}=Q^{-1}X_t$$

(pour la matrice Q définie à la question précédente). Comme la matrice $Q^{-1}$ est indépendante du temps $t$, on en déduit que

$$Y'_t = Q^{-1}X'_t = Q^{-1}MX_t = (Q^{-1}MQ)(Q^{-1}X_t) = DY_t$$

ce qui se traduit par le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y'_1(t) &= 2y_1(t) \\ y'_2(t) &= 2y_2(t) \\ y'_3(t) &= 6y_3(t) \\ y'_4(t) &= 6y_4(t) \end{cases}$$

(où, fait remarquable, *les quatre équations sont découplées*).

La solution général de ce système est donc de la forme

$$\begin{cases} y_1(t) &= K_1e^{2t} \\ y_2(t) &= K_2e^{2t} \\ y_3(t) &= K_3e^{6t} \\ y_4(t) &= K_4e^{6t} \end{cases}$$

ce qui nous donne enfin

$$X_t = QY_t = \begin{pmatrix} K_1e^{2t} + K_3e^{6t} \\ K_2e^{2t} + K_4e^{6t} \\ -K_1e^{2t} + K_3e^{6t} \\ -K_2e^{2t} + K_4e^{6t} \end{pmatrix}.$$