

Problème de Mathématiques

Référence pp2001 — Version du 6 décembre 2025

Soit $d \in \mathbb{N}$, fixé. On note $E = \mathbb{R}_d[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d .

On étudie ici l'application S définie par

$$\forall (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad S\left(\sum_{i=0}^d a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} X^i.$$

On notera I , l'endomorphisme identité de E et U , le sous-espace de $L(E)$ engendré par I, S, \dots, S^d .

Partie A.

On choisit de représenter le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$$

par la liste

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_d].$$

1. Écrire une fonction `non_nul(A)` qui retourne `True` si, et seulement si, le polynôme représenté par la liste A n'est pas le polynôme nul.
2. Écrire une fonction `degre(A)` qui retourne le degré du polynôme représenté par A (en supposant que la liste A ne représente pas le polynôme nul).
3. Écrire une fonction `Toepplitz(A)` qui retourne la liste représentant le polynôme $S(P)$.

Partie B.

4. Démontrer que S est un endomorphisme de E .
5. Pour $0 \leq i \leq d$, calculer l'image de X^i par S .
6. Écrire la matrice de S relative à la base

$$\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^d).$$

7. Pour $1 \leq k \leq d$, écrire la matrice de S^k relative à la base \mathcal{B}_0 . En déduire que $S^{d+1} = 0$.
8. Soit $u \in L(E)$. Démontrer que u appartient au sous-espace U si, et seulement si, sa matrice

$$B = (b_{i,j})_{0 \leq i, j \leq d}$$

relative à \mathcal{B}_0 est triangulaire supérieure et vérifie

$$\forall 0 \leq i \leq j \leq d, \quad b_{i,j} = b_{0,j-i}.$$

9. Démontrer que

$$(I, S, \dots, S^d)$$

est une famille libre de $L(E)$.

10. Dans cette question, on suppose que $u \in L(E)$ commute à S . Vérifier que

$$\forall 0 \leq k \leq d, \quad u(X^k) = S^{d-k}(u(X^d)).$$

11. Démontrer que U est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à S .

Solution ✱ Matrices de Toeplitz

Partie A.

1. Méthode élémentaire : on passe en revue un par un les éléments de la liste A et on les compare à 0. On retourne True si *au moins une* des comparaisons donne un résultat satisfaisant, ce qui revient à évaluer l'opération booléenne suivante.

$$[a_0 \neq 0] \text{ ou } [a_1 \neq 0] \text{ ou } \dots \text{ ou } [a_d \neq 0]$$

```
def non_nul(A):
    b = False
    for a in A:
        b = b or (a!=0)
    return b
```

Variante pythonnienne : on transforme la liste en tableau numpy; en comparant ce tableau à 0, on obtient un tableau de booléens; on calcule la somme de ce tableau de booléens (avec la convention True=1 et False=0); le résultat donne le nombre de coefficients non nuls et le polynôme n'est pas nul si, et seulement si, le nombre de coefficients non nuls est au moins égal à 1.

```
import numpy as np
def non_nul(A):
    tab_coeffs_non_nuls = (np.array(A)>0)
    nb_coeffs_non_nuls = sum(tab_coeffs_non_nuls)
    return (nb_coeffs_non_nuls>0)
```

2. On parcourt la liste A du début à la fin. À chaque fois qu'on rencontre un coefficient non nul, on note le degré du monôme. Le degré du dernier coefficient non nul rencontré est alors le degré du polynôme.

```
def degre(A):
    d = 0
    for i in range(len(A)):
        if (A[i]!=0):
            d = i
    return d
```

Variante pythonnienne : au lieu de parcourir la liste, on l'énumère, c'est plus léger!

```
def degre(A):
    d = 0
    for i, a in enumerate(A):
        if (a!=0):
            d = i
    return d
```

3. On récupère les coefficients a_1, \dots, a_d et on complète avec un coefficient nul.

Méthode élémentaire : on définit une liste en compréhension et on ajoute un élément au bout de cette liste.

```
def Toeplitz(A):
    T = [ A[i] for i in range(1, len(A)) ]
    T.append(0)
    return T
```

Variante pythonnienne : on coupe une tranche!

```
def Toeplitz(A):
    return A[1:]+[0]
```

Partie B.

4. Tout d'abord, en tant qu'application, S est bien définie sur E puisque chaque polynôme $P \in E$ s'écrit de manière *unique* sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

Ensuite, S est une application de E dans E , car $S(P)$ est bien un polynôme à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à d .

Enfin, S est bien un endomorphisme de E : il reste à vérifier la linéarité de S , c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in E, \quad S(\lambda P + Q) = \lambda S(P) + S(Q)$$

et ce calcul est sans mystère (il doit néanmoins être détaillé sur la copie).

5. Comme

$$X^i = \sum_{k=0}^d \delta_{i,k} X^k$$

(en utilisant le symbole de Kronecker), alors

$$S(X^i) = \sum_{k=0}^{d-1} \delta_{i,k+1} X^k = \sum_{k=0}^{d-1} \delta_{i-1,k} X^k$$

(puisque $i = k + 1 \iff i - 1 = k$). Donc :

- ou bien $i = 0$ et dans ce cas $S(1) = 0$;
- ou bien $1 \leq i \leq d$ et dans ce cas $S(X^i) = X^{i-1}$.

6. D'après la question précédente,

$$(S(1), S(X), S(X^2), \dots, S(X^d)) = (0, 1, X, \dots, X^{d-1}).$$

On en déduit que la matrice de S relative à la base canonique \mathcal{B}_0 de $\mathbb{R}_d[X]$ est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & \diagdown \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

7. On déduit facilement de la question précédente que

$$\forall 0 \leq i < k, \quad S^k(X^i) = 0$$

et que

$$\forall k \leq i \leq d, \quad S^k(X^i) = X^{i-k}.$$

La matrice de S^k relative à la base canonique est donc la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \diagdown & & \\ & & & & & \diagdown & \\ & & & & & & \diagdown \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

(Sur la première ligne, le coefficient 1 apparaît en $(k + 1)$ -ième position, puisque $S^k(X^k) = 1$.)

8. L'endomorphisme u appartient au sous-espace U si, et seulement si, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ tels que

$$u = \sum_{k=0}^d \lambda_k S^k$$

coïncidaient sur la base canonique \mathcal{B}_0 , ce qui prouve que ces deux endomorphismes sont égaux. Ainsi

$$u = \sum_{i=0}^d \lambda_i S^i \in \mathcal{U}.$$

On a bien démontré que le sous-espace \mathcal{U} est bien l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à S .