Réduction des endomorphismes : énoncés

Exercices CCP

1) Déterminer les éléments propres l'endormorphisme Φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = (3X+8)P + (X^2-3X)P' - (X^3+X^2)P''$$

Φ est-il surjectif ?

2) Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Déterminer χ_A, π_A et $\exp(A)$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = I_n$. Calculer e^A.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable. Montrer que $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

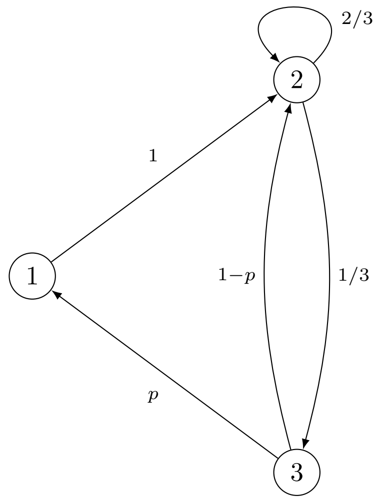
7) La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable (où j est la racine cubique de l'unité) ?

8) Soit $A \in \mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\det A = 1$ et que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module 1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

9) Trouver les $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix}$ admette 1, 2 et 3 pour valeurs propres.

10) Trouver $(x,y,z,a,b,c) \in \mathbb{R}^6$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres.

11) On considère le graphe probabiliste suivant :



Une puce se déplace de sommet en sommet avec les contraintes suivantes :

- à l'instant initial 0, la puce est en 1, 2 ou 3 avec probabilités respectives a, b et c ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ et $a+b+c=1$).
- la puce se déplace ensuite à chaque instant aléatoirement dans $\{1,2,3\}$ en suivant les arêtes du graphe, le poids d'une arête étant égal à la probabilité que la puce emprunte cette arête.

a) Donner un modèle probabiliste précis de cette situation, en notant X_n la variable aléatoire qui prend la valeur i si la puce est en i à l'instant n.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la loi de X_n. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

12) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

13) Soit A une matrice triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{k-1,k} \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

avec A_i matrice carrée pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$.

Que peut-on dire des polynômes caractéristique et minimal de A ? Reprendre la question avec A diagonale par bloc.

14) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $(AB)^n = 0$, alors $(BA)^n = 0$.

15) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercices Mines-Centrale

16) Soit $E=\mathbb{R}_{2n}[X]$ et $a\in\mathbb{R}$. On définit φ par :

$$\forall P\in E,\ \varphi(P)=(X^2-a^2)P'-2nXP$$

Montrer que $\varphi\in\mathcal{L}(E)$ et calculer ses valeurs et vecteurs propres.

17) Soit $M\in\mathcal{M}_n(K)$, de polynôme caractéristique scindé $\prod_{i=1}^n(X-\lambda_i)$. Pour $P\in K[X]$, quel est le polynôme caractéristique de $P(M)$?

18) Diagonaliser la matrice circulante : $M(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On utilisera la matrice $J=M(0,1,0,\dots,0)$.

19) Montrer que toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est semblable à une (et à une seule) des matrices :

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

20) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f\circ g=0$ et on souhaite montrer que f et g sont simultanément trigonalisables, i.e. qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et de g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

a) Montrer le résultat quand f est inversible.

b) On suppose maintenant que f n'est pas inversible. Montrer que le noyau de f est stable par g. En déduire que f et g possède un vecteur propre commun. Conclure.

21) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. Soit $F\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par :

$$\forall u\in\mathcal{L}(E),\ F(u)=u\circ f$$

Montrer que F est diagonalisable si et seulement si f l'est. Que se passe-t-il avec $G:u\mapsto f\circ u$?

22) Les matrices $A_1=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&4&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B_1=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&4&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Même question avec $A_2=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}$ et $B_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, puis avec $A_3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $B_3=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

23) a) Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0\in\mathbb{C}[X]$, de racines $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. On pose :

$$\forall\,k\in\mathbb{N},\ S_k=\sum_{i=1}^n\lambda_i^k.$$

Montrer que $P'=\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{P}{X-\lambda_i}$; exprimer le polynôme $\dfrac{P}{X-\lambda_i}$ en fonction des a_k et en déduire les relations :

$$\forall\,k\in\{1,\dots,n\},\ ka_{n-k}+a_{n-k+1}S_1+a_{n-k+2}S_2+\dots+a_{n-1}S_{k-1}+S_k=0$$

b) Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \mathrm{Tr}(A^j) = \mathrm{Tr}(B^j)$ si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

c) Trouver les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \mathrm{Tr}(A^j) = n$.

24) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

25) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $\det(A + X) = \det A + \det X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$.

26) Calculer la puissance n-ième de la matrice : $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$.

27) Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_3(K)$ vérifiant $M^4 = M^2$?

28) Quels sont les matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A^2 et A^3 sont semblables ?

29) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est nilpotente d'indice n, alors A est semblable à $J = (\delta_{i+1,j})_{1 \le i,j \le n}$.

30) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 2A & A \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $F(\lambda) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2n})$.

a) Montrer que $F(-2) = \{0\}$ et que, pour tout $\lambda \neq -2$, $F(\lambda)$ a même dimension que $E\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\right)$.

b) Donner une CNS portant sur A pour que M soit diagonalisable.

31) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de la comatrice de A en fonction de celui de A.

b) On pose $\widetilde{A} = (\mathrm{Com}\, A)^\top$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $\widetilde{A}$.

c) On suppose A non inversible.

(i) Montrer que 0 est valeur propre simple de A si et seulement si $\widetilde{A}$ est de trace non nulle.

(ii) Si 0 est valeur propre simple de A, $\widetilde{A}$ est-elle diagonalisable ?

iii) Peut-on remplacer dans i) la condition « 0 est valeur propre simple » par la condition « $\mathrm{rg}\, A = n - 1$ » ?

32) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique. On commencera par le cas A inversible.

33) Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A & A & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & A & A & A \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

34) a) Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

b) On suppose que K est un corps commutatif tel que $1 + 1 \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe de $GL_n(K)$ tel que $A^2 = I_n$ pour tout $A \in G$. Montrer qu'il existe P dans $GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale pour toute matrice A de G. En déduire que $\mathrm{Card}(G) \le 2^n$.

c) Montrer que pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ distincts, les groupes $GL_n(K)$ et $GL_m(K)$ ne sont pas isomorphes.

35) Le corps de base est $\mathbb{R}$. Soit $J = (\delta_{i+1,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $A = I_n + J$.

a) Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec J ?

b) Par analogie avec un certain développement limité, trouver toutes les matrices B telles que $B^2 = A$.

36) Soit E un K-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker}\,(P \wedge Q)\,(u)$.

37) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2\,(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_2\,(\mathbb{C})\,,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$. Montrer que $\varphi = \det$.

38) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des valeurs et vecteurs propres de BA ?

39) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r telle que $AX = XB$. Montrer que le pgcd de χ_A et χ_B est de degré $\geq r$.

40) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P'(u) \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $P(u)$ est diagonalisable.

41) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

b) Montrer que si n est impair, $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

42) On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on note D l'opérateur de dérivation. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = D$. Montrer que pour tout n, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par g. En déduire qu'un tel g n'existe pas.

43) (Mines 2016) Résoudre $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Résoudre ensuite $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, toujours dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

44) (Mines 2016) Résoudre $4A^3 + 2A^2 + A = 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On commencera par montrer que si A est solution, A^k tend vers la matrice nulle quand k tend vers l'infini.

45) (Mines 2016) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant 0 pour valeur propre simple. Montrer que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

46) (Mines 2017) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi :\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto AM - MB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si A et B n'ont pas de valeurs propres communes.

b) Donner les expressions des valeurs propres de φ en fonction de celles de A et de B.

47) Déterminer les entiers n tels qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal égal à $X^3 + 2X + 2$. Reprendre la question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

48) Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal π. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par u et $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux de $K[X]$ contenant π.

a) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Montrer que l'application $I \longmapsto \{P(u)(x),\ P \in I\}$ est une bijection de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{S}$. En déduire que $\mathcal{S}$ est fini.

b) On suppose que K est infini. On admet que pour une famille de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\leq i\leq p}$, on a :

$$\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E \Longrightarrow \exists i \in \{1,\ldots,p\},\ F_i = E.$$

Montrer que si $\mathcal{S}$ est fini, il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

c) Question subsidiaire : démontrer le résultat admis.

49) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = (m^n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $m^n_{i,j} = 1$ si $(i,j) = (1,n)$ ou $i \geq j$, et $m^n_{i,j} = 0$ sinon.

a) Calculer χ_{M_n}.

b) Montrer que M_n possède une unique valeur propre $\lambda_n \in [1, +\infty[$.

c) Donner un équivalent de λ_n quand n tend vers l'infini.

50) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^m) = \mathrm{Tr}(B^m)$.

51) a) Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables et si A est inversible, $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ sont également semblables.

b) Montrer que si K est un corps infini, le résultat reste vrai pour A quelconque.

c) On suppose que K est infini et que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ scindé. Donner une expression du polynôme caractéristique de $\mathrm{Com}(A)$.

52) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et soit u un endomorphisme de E. On note, pour chaque x de E, $\pi_{u,x}$ le générateur normalisé de l'idéal : $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X]\ /\ (P(u))(x) = 0\}$. On note π_u le polynôme minimal de u. Nous allons montrer de deux façons qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$.

Première méthode : récurrence sur la dimension de E

a) Montrer qu'il existe un hyperplan H stable par u. Soit v la restriction de u à H.

b) En supposant le résultat démontré pour (H, v), on fixe $x \in H$ tel que $\pi_v = \pi_{v,x}$. Soit $y \in E \setminus H$. Montrer qu'il existe deux complexes distincts λ et μ tels que : $\pi_{u,x+\lambda y} = \pi_{u,x+\mu y}$. Montrer qu'alors ce polynôme est égal à π_u. Conclure.

Seconde méthode : utilisation des sous-espaces caractéristiques

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, nous pouvons écrire $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $k \geq 1$ et $m_1, \ldots, m_k \geq 1$, les λ_i étant les valeurs propres distinctes de u. On a alors $E = \displaystyle\bigoplus_{1\leq i\leq k} F_i$ avec $\forall i,\ F_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i Id)^{m_i})$.

a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe $x_i \in F_i$ tel que $\pi_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{m_i}$.

b) Montrer que le vecteur $x = x_1 + \cdots + x_k$ est solution du problème posé.

53) Soient K un corps commutatif, $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$. On suppose que AB est inversible et diagonalisable. On fixe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs propres de AB.

a) Calculer les rangs de A et B et démontrer que $\mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, B = K^n$. Que peut-on dire de la restriction de l'application $X \longmapsto AX$ à l'espace $\mathrm{Im}\, B$?

b) Montrer que BA est diagonalisable.

54) (Centrale Python) Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$.

a) Justifier que $M(t)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On note $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \gamma(t)$ ses trois valeurs propres.

b) Écrire une fonction qui, appliquée à t et à x, renvoie la valeur de $\chi_{M(t)}(x)$.

c) Tracer les graphes des fonctions α, β et γ. Faire une conjecture sur la monotonie et les limites de ces fonctions.

d) Prouver ces conjectures.

55) (Mines 22) On définit $u \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = f(px + 1 - p)$$

où $p \in]0, 1[$ est fixé.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset]-1, 1]$. On pourra utiliser les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = px_n + 1 - p$.

b) Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

c) Déterminer les éléments propres de u.

56) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K.

a) Pour $x \in E$, montrer que $I_x = \{P \in K[X],\ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$. On note $\pi_{f,x}$ son polynôme générateur normalisé. Montrer que $\pi_{f,x}$ divise le polynôme minimal π_f de f.

Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f et que ce sous-espace, noté E_x a pour dimension le degré d_x de $\pi_{f,x}$.

b) Montrer que si $x, y \in E$ sont tels que $\pi_{f,x} \wedge \pi_{f,y} = 1$, alors $\pi_{f,x+y} = \pi_{f,x}\,\pi_{f,y}$ et $E_x \oplus E_y = E_{x+y}$.

c) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,x} = \pi_f$.

Exercices X-ENS

57) (PLC) Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ à valeurs propres (complexes) de module au plus 1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de l'unité.

58) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que si $f^2 = f$ ou $f^3 = f$, alors f est diagonalisable.

b) Si $f^4 = f$, f est-il diagonalisable ?

c) On suppose que $n = 3$. Trouver une partie finie S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de cardinal minimal telle que pour tout endomorphisme f tel que $f^4 = f$, on peut trouver $A \in S$ telle A soit la matrice de f dans une certaine base de E.

59) (P) Soit K un corps infini, E un espace vectoriel de dimension finie n sur K et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini si et seulement si le polynôme minimal de f est égal à son polynôme caractéristique.

60) (X) Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme non nul P tel que $P(u) = 0$. Si $Q \in K[X]$, existe-t-il nécessairement $R \in K[X]$ non nul tel $R(Q(u)) = 0$?

61) (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des complexes deux à deux distincts. On suppose que chaque $A + \lambda_i B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

62) (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^m)$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

63) (X 2018) Soient M et N deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $NM + MN = I_2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

64) (X) Résoudre $A^2 = -I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

65) (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Calculer χ_M et montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

66) (X) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si f^m est diagonalisable, f^{m+1} l'est également.

67) Soit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Montrer que l'ordre de M dans $SL_2(\mathbb{Z})$ est au plus 6. Montrer que si M est d'ordre 4, elle est conjuguée soit à $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit à $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

68) (X 2012) a) Soit K un corps commutatif. Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(K)$ pour que A possède un hyperplan stable. À quelle condition cet hyperplan est-il unique ?

b) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui possèdent exactement trois plans stables ?

69) (PLCR 2016) a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A est nilpotente.

b) Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p nombre premier strictement supérieur à n.

70) (X 2019) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la suite $\big(\dim(\mathrm{Ker}(u^k))\big)_{k \geq 0}$ est concave.

71) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à M ?

72) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec f inversible, g nilpotent et $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = f + g$.

Réduction des endomorphismes : corrigés

Exercices CCP

1) Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre associé. Si aX^d est le terme dominant de P, le coefficient du terme de degré $d+1$ de $\Phi(P) - \lambda P$ est $(3 + d - d(d-1))\,a$. Comme a est non nul, on a $3 + d - d(d-1) = 0$, soit $3 + 2d - d^2 = 0$. On en déduit que $d = 3$ (puisque $d \geq 0$). On peut donc écrire : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} (8-\lambda)d = 0 \\ (5-\lambda)c + 3d = 0 \\ -\lambda b + 4c = 0 \\ -(\lambda+7)a + 3b = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système triangulaire vaut $(\lambda-8)(\lambda-5)\lambda(\lambda+7)$, donc il aura une solution non nulle si et seulement si $\lambda \in \{-7, 0, 5, 8\}$. Φ a donc 4 valeurs propres, associées à des espaces propres de dimension 1. On calcule facilement une base de chacun des espaces propres :

$$E_{-7} = \mathrm{Vect}(X^3),\ E_0 = \mathrm{Vect}(X^3 + \frac{7}{3}X^2),\ E_5 = \mathrm{Vect}(X^3 + 4X^2 + 5X) \text{ et } E_8 = \mathrm{Vect}(X^3 + 5X^2 + 10X + 10).$$

Remarque : comme les vecteurs propres sont de degré 3, on peut aussi étudier la restriction de Φ à $\mathbb{R}_3[X]$, qui est stable par Φ. On se ramène ainsi à l'étude d'un endomorphisme en dimension 4 et on n'est pas surpris de ne trouver que 4 valeurs propres associées à des espaces propres de dimension 1. On aurait pu d'ailleurs étudier la matrice A de la restriction de Φ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont évidentes.

Comme la restriction de Φ à $\mathbb{R}_3[X]$ est un endomorphisme non injectif (0 est valeur propre), elle n'est donc pas surjective. Il existe ainsi un polynôme P_0 de degré au plus 3 qui ne possède pas d'antécédent par Φ dans $\mathbb{R}_3[X]$ (Il suffit de choisir $P_0 \in \mathbb{R}_3[X] \setminus \Phi(\mathbb{R}_3[X])$). Ce polynôme P_0 ne peut pas avoir d'antécédent de degré $d > 3$, puisque si P est de degré $d > 3$, $\Phi(P)$ est de degré $d+1$ (le coefficient de X^{d+1} ne s'annule pas). Φ n'est donc pas surjective.

2) A est diagonale par bloc : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \text{ et } \exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{pmatrix}.$$

On a ensuite $B^2 = -I_2$, donc $B^{2k} = (-1)^k I_2$ et $B^{2k+1} = (-1)^k B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$\exp(B) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right) B = \cos(1)\, I_2 + \sin(1)\, B = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) \\ 0 & \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$

3) On a $A^2 = I_5$ donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puisque ce polynôme est non nul, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. Comme $X - 1$ et $X + 1$ n'annulent pas A, $\pi_A = X^2 - 1$. On en déduit que les valeurs propres de A sont 1 et -1. Comme la trace de A vaut 1, A est triple et -1 est double. On a donc $\chi_A = (X-1)^3(X+1)^2$. On trouve ensuite facilement des bases des deux espaces propres : avec $X = (a,b,c,d,e)$, on a

$$AX = X \iff \begin{cases} e = x \\ d = b \\ c = c \\ b = d \\ x = e \end{cases} \iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$AX = -X \iff \begin{cases} e = -x \\ d = -b \\ c = -c \\ b = -d \\ x = -e \end{cases} \iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On en déduit que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut aller beaucoup plus vite, en remarquant que si A est la matrice d'un endomorphisme f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), alors la matrice de f dans la base $(e_1, e_5, e_2, e_4, e_3)$ est diagonale par bloc :

$$A = Q \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\exp(A) = Q \begin{pmatrix} \exp(B) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(B) & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Comme $B^2 = I_2$, $\exp(B) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \right) B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}$. On obtient donc :

$$\exp(A) = Q \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sh} 1 \\ 0 & \operatorname{ch} 1 & 0 & \operatorname{sh} 1 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} 1 & 0 & \operatorname{ch} 1 & 0 \\ \operatorname{sh} 1 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}.$$

4) On peut commencer par diagonaliser A :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $Q = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$, on a ensuite :

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut ensuite réorganiser les lignes et colonnes en effectuant un changement de base : si cette dernière matrice est celle d'un endomorphisme f dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, on a :

$$\mathrm{Mat}(f, (e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en posant $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$(QR)^{-1}B(QR) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 3C \end{pmatrix}$$

avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste à diagonaliser C (qui est de rang 2 : 0 est valeur propre double est la dernière valeur propre est 3) :

$$S^{-1}CS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ et on a :

$$(QRT)^{-1}B(QRT) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ avec } QRT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : il est évidemment possible de diagonaliser B sans utiliser sa forme particulière : on remarque que B est de rang 2, donc 0 est valeur propre d'ordre au moins 4 (son espace propre est de dimension 4), puis 9 est valeur propre évidente associée au vecteur propre $e_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (la somme de chaque ligne de B vaut 9). La dernière valeur propre est donc 3, puisque $\mathrm{Tr}(B) = 12$. Nous avons donc trois valeur propre : 0 (d'ordre 4), 3 (d'ordre 1) et 9 (d'ordre 1). On peut ensuite chercher directement des bases des espaces propres. On peut choisir $e_5 = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$ pour avoir $Be_5 = 3e_5$ et il reste à choisir une base (e_1, e_2, e_3, e_4) du noyau ; on résout pour cela un système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + t + 2u + v = 0 \\ x + 2y + z + 2t + u + 2v = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = -2z - t - 2u - v \\ -3x = 3z + 3u \end{cases}$$

et on peut choisir $e_1 = (-1,0,1,0,0,0)$, $e_2 = (0,-1,0,1,0,0)$, $e_3 = (-1,0,0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,-1,0,0,0,1)$. Nous avons donc :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Comme $A^4 = I_n$, on a $A^k = A^r$ où r est le reste dans la division euclidienne de k par r. Nous avons donc :

$$\exp(A) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!}\right) A + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)!}\right) A^2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)!}\right) A^3.$$

Pour $0 \leq i \leq 3$, notons $S_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+i)!}$. Nous avons :

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = e \\ S_0 + iS_1 - S_2 - iS_3 = e^i \\ S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = e^{-1} \\ S_0 - iS_1 - S_2 + iS_3 = e^{-i} \end{cases}$$

Si on le veut vraiment, on peut résoudre ce système de Cramer :

$$\begin{cases} S_0 = \dfrac{\cos 1 + \operatorname{ch} 1}{2} \\ S_1 = \dfrac{\sin 1 + \operatorname{sh} 1}{2} \\ S_2 = \dfrac{-\cos 1 + \operatorname{ch} 1}{2} \\ S_3 = \dfrac{-\sin 1 + \operatorname{sh} 1}{2} \end{cases}$$

6) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Delta$. En notant Q la matrice inversible $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, nous avons :

$$Q^{-1}\, B\, Q = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & P^{-1}I_nP \\ P^{-1}I_nP & P^{-1}AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & I_n \\ I_n & \Delta \end{pmatrix}.$$

Si on note f un endomorphisme et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{2n})$ une base telle que cette matrice soit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, alors B est semblable à la matrice C de f dans la base $(e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \dots, e_n, e_{2n})$, qui est diagonale par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de montrer que les matrices D_i sont diagonalisable pour que B le soit, ce qui est une formalité car D_i possède les deux valeurs distinctes $\lambda_i + 1$ et $\lambda_i - 1$ ($\alpha = \lambda_i + 1$ est une valeur propre évidente, car les sommes des deux lignes de D_i sont égales à α, et on obtient la seconde valeur propre β grâce à $\alpha + \beta = \mathrm{Tr}(D_i) = 2\lambda_i$).

Astuce : on peut aussi, à partir de la matrice $\begin{pmatrix} \Delta & I_n \\ I_n & \Delta \end{pmatrix}$, penser directement à introduire la matrice de passage $R = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ et vérifier que la matrice

$$R^{-1} \begin{pmatrix} \Delta & I_n \\ I_n & \Delta \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta + I_n & 0 \\ 0 & \Delta - I_n \end{pmatrix}$$

est diagonale.

7) J est de rang 1 (la colonne C_1 est non nulle, $C_2 = jC_1$ et $C_3 = j^2 C_1$) donc 0 est valeur propre d'ordre au moins 2 (l'espace associé à 0 est le noyau, qui est de dimension 2). Comme la trace de J est nulle, la troisième valeur propre est aussi nulle. Ainsi, $\chi_J = X^3$ et J n'est pas diagonalisable (sinon, elle serait semblable, donc égale à la matrice nulle).

8) 1 et -1 sont les seules valeurs propres réelles possibles de A. Comme χ_A est un polynôme réel, nous pouvons donc écrire :

$$\chi_A = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)(X - \overline{\lambda_i})$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ complexes non réels de module 1. On a ensuite :

$$\begin{cases} 1 = \det(A) = (-1)^\beta \\ 2n + 1 = \deg(\chi_A) = \alpha + \beta + 2k \end{cases}$$

On en déduit que β est pair et que α est impair : α est donc non nul et 1 est valeur propre de A.

9) Notation : pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, notons :

$$\begin{cases} \sigma_1(a,b,c) = a + b + c \\ \sigma_2(a,b,c) = ab + bc + ca \\ \sigma_3(a,b,c) = abc \end{cases}.$$

(x, y, z) est solution du problème si et seulement 1, 2 et 3 sont les racines du polynôme caractéristique de A. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \text{ est solution} \quad &\iff \begin{vmatrix} X - x & -1 & -1 \\ -1 & X - y & -1 \\ -1 & -1 & X - z \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3) \\
&\iff X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy + yz + zx - 3)X + x + y + z - xyz - 2 \\
&\qquad\qquad = X^3 - \sigma_1(1,2,3)X^2 + \sigma_2(1,2,3)X - \sigma_3(1,2,3) \\
&\iff \begin{cases} \sigma_1(x,y,z) = \sigma_1(1,2,3) = 6 \\ \sigma_2(x,y,z) - 3 = \sigma_2(1,2,3) = 11 \\ \sigma_1(x,y,z) - \sigma_3(x,y,z) - 2 = -\sigma_3(1,2,3) = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \sigma_1(x,y,z) = 6 \\ \sigma_2(x,y,z) = 14 \\ \sigma_3(x,y,z) = 10 \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) \text{ sont les racines de } P = X^3 - 6X^2 + 14X - 10
\end{aligned}$$

on ne peut guère être plus précis car P n'a pas de racine évidente (s'il avait une racine rationnelle p/q avec $p \wedge q = 1$, on aurait $p \,|\, 10$ et $q \,|\, 1$, donc les seules racines possibles sont -10, -5, -2, -1, 1, 2, 5 et 10, et aucune de ces valeurs n'est racine de P. On peut montrer que P possède une unique racine réelle simple (environ égale à 1,23) et deux racines complexes conjuguées.

10) En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut calculer $D = P^{-1}AP$ et trouver à quelle condition D est diagonale. Un calcul laborieux nous donne :

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3+x+y+z+a+b+c & 3-a-b-c & 3-x-y-z \\ 9x+y-2z+a+b-2c & -a-b+2c & -x-y+2z \\ x-2y+z+a-2b+c & -a+2b-c & -x+2y-z \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système de Cramer :

$$\begin{cases} 3-a-b-c=0 \\ 3-x-y-z=0 \\ 9x+y-2z+a+b-2c=0 \\ -x-y+2z=0 \\ x-2y+z+a-2b+c=0 \\ -a+2b-c=0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $x = y = z = a = b = c = 1$.

Il est un peu plus simple d'écrire $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & \end{pmatrix}$ et $AP = PD$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1+x+a \\ 1+y+b \\ 1+z+c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-b \\ 1-c \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi un système de 9 équations à 9 inconnues, qui se résout facilement par pivotages :

$$\begin{cases} 1+x+a=\lambda \\ 1+y+b=\lambda \\ 1+z+c=\lambda \\ 1-a=\mu \\ 1-b=0 \\ 1-c=-\mu \\ 1-x=\nu \\ 1-y=-\nu \\ 1-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=z=1 \\ \lambda=1+x+a \\ \mu=1-a \\ \nu=1-x \\ x+a=y+1 \\ x+a=1+c \\ 1-a=c-1 \\ 1-x=y-1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=z=1 \\ \lambda=1+x+a \\ \mu=1-a \\ \nu=1-x \\ y=c \\ x+a-c=1 \\ a+c=2 \\ x+c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=z=1 \\ \lambda=1+x+a \\ \mu=1-a \\ \nu=1-x \\ y=c \\ x+a-c=1 \\ a+c=2 \\ -a+2c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=z=1 \\ \lambda=1+x+a \\ \mu=1-a \\ \nu=1-x \\ y=c \\ x+a-c=1 \\ a+c=2 \\ 3c=3 \end{cases}$$

Ce qui nous donne la solution $a = b = c = x = y = z = 1$, $\lambda = 3$ et $\mu = \nu = 0$.

11) a) On peut modéliser le problème par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, définies sur le même espace probabilité ,Ω,vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_0 = 1) = a,\ \mathbf{P}(X_0 = 2) = b \text{ et } \mathbf{P}(X_0 = 3) = c \\ \forall n \geq 0,\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\},\ \mathbf{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j) = p_{i,j} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad P = (p_{i,j})_{i \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 1 & 2/3 & 1-p \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $V_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \\ \mathbf{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $(X_n = i)_{1 \leq i \leq 3}$ est un système complet d'évènement, la formule des probabilités totales donne :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ \mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} p_{i,j} \mathbf{P}(X_n = i),$$

ce qui donne $V_n = P^n V_0$.

On va réduire la matrice P : $\chi_P(X) = (X-1)\left(X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{p}{3}\right)$ et le discriminant du trinôme vaut $\frac{1-12p}{9}$. Nous avons donc deux cas à étudier.

- 1er cas : $p \neq \frac{1}{12}$.

  P a trois valeurs propres distinctes (dans $\mathbb{C}$) : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-1+\mu}{6}$ et $\lambda_3 = \frac{-1-\mu}{6}$, où μ est une racine (éventuellement complexe) de $1 - 12p$. P est donc diagonalisable et on peut calculer une base de vecteurs propres (e_1, e_2, e_3). On trouve facilement $e_1 = \begin{pmatrix} p \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} p \\ 3\lambda_2^2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\lambda_2 - p \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} p \\ 3\lambda_3^2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\lambda_3 - p \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a :

  $$P^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} p & p & p \\ 3 & -\lambda_2 - p & -\lambda_3 - p \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

  Le lecteur courageux pourra calculer ce produit pour donner des expressions des $P(X_n = i)$.
  Si $p > \frac{1}{12}$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ et $|\lambda_2|^2 = \lambda_2 \lambda_3 = \frac{p}{3} < 1$.
  Si $p < \frac{1}{12}$, on a $-\frac{1}{3} = \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-12p}}{6} \leq \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{1-12p}}{6} < 0$. Ainsi, dans tous les cas, P^n converge vers $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ quand n tend vers l'infini.

- 2ème cas : $p = \frac{1}{12}$. P a alors $\lambda_1 = 1$ pour valeur propre simple et $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$ pour valeur propre double. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1/12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de l'espace propre associé à λ_1, mais P n'est pas diagonalisable car l'espace propre associé à λ_2 est de dimension 1, engendré par $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut ensuite calculer un vecteur e_3 tel que $Pe_3 = e_2 + \lambda_2 e_3$ (pour obtenir une forme de Jordan), en résolvant le système :

  $$\begin{cases} \frac{1}{12}z = -\frac{1}{6}x - 1 \\ x + \frac{2}{3}y + \frac{11}{12}z = -\frac{1}{6}y - 1 \\ \frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}z + 2 \end{cases}$$

  ce qui donne (par exemple) $e_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on a :

  $$P^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}^n Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/6)^n & n(-1/6)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1/12 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et P^n converge encore vers $Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}$.

Ainsi, dans tous les cas, V_n converge vers un vecteur colinéaire à e_1. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n appartient à l'hyperplan d'équation $x+y+z=1$: il en est donc de même de sa limite. On a donc :

$$V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{p+4}\begin{pmatrix}p\\3\\1\end{pmatrix}.$$

12) Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est un polynôme annulateur de A. On en déduit que les valeurs propres de A sont des racines de P. On fait une étude élémentaire de la fonction $x \longmapsto x^3 - x - 1$: P est strictement croissant sur $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, strictement décroissant sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et strictement croissant sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$; comme $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$ et que $P(x)$ tend vers l'infini en $+\infty$, P possède une unique racine réelle α ; cette racine est simple et strictement positive.

On en déduit que les deux autres racines de P sont complexes non réelles et conjuguées : $P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\overline{\beta})$ avec $\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On en déduit que le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = (X-\alpha)^p(X-\beta)^q(X-\overline{\beta})^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + 2q = n$. On a donc :

$$\det(A) = \alpha^p\,|\beta|^{2q} > 0.$$

13) On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} XI_{n_1} - A_1 & -A_{1,2} & \dots & -A_{1,k} \\ 0 & XI_{n_2} - A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -A_{k-1,k} \\ 0 & \dots & 0 & XI_{n_k} - A_k \end{vmatrix} = \chi_{A_1}\,\chi_{A_2}\,\cdots\,\chi_{A_k}$$

Pour $P \in K[X]$, la matrice $P(A)$ est également triangulaire par blocs, de blocs diagonaux $P(A_1), \dots, P(A_k)$. Pour que $P(A)$ soit nul, il faut donc que tous les $P(A_i)$ le soit. Le polynôme minimal de A est donc un multiple des polynômes minimaux des A_i. Autrement-dit :

$$\pi_{A_1} \vee \pi_{A_2} \vee \pi_{A_k} \mid \pi_A.$$

Si A est diagonale par blocs, $P(A) = 0$ si et seulement tous les $P(A_i)$ sont nuls et π_A est le p.p.c.m. des π_{A_i}.

14) Supposons que $(AB)^n = 0$. On a $(BA)^{n+1} = B(AB)^nA = 0$, donc BA est nilpotente. On en déduit que $\chi_{BA} = X^n$, puis $(BA)^n$ par le théorème de Cayley-Hamilton.

15) On a facilement $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} = B$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. En posant $P^{-1}XP = Y$, l'équation devient :

$$Y^2 + Y = P^{-1}(X^2+X)P = P^{-1}AP = B.$$

Si Y est une solution de cette équation, Y commute avec B, donc Y est diagonale. On peut donc écrire $Y = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ et $Y^2 + Y = B$ est équivalent à $(a^2+a=0,\ b^2+b=2)$, soit $a \in \{-1, 0\}$ et $b \in \{-2, 1\}$. L'équation a donc 4 solutions :

$$X_1 = P\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&-3\end{pmatrix} \qquad X_2 = P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$X_3 = P\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix} \qquad X_4 = P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Exercices Mines-Centrale

16) On remarque que $(X^2-a^2)P'-2nXP$ est bien de degré au plus $2n$ (les termes de degrés $2n+1$ se téléscopent) et la linéarité de φ est conséquence de la linéarité de la dérivation et de la bilinéarité du produit des polynômes.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on résout l'équation différentielle (E) : $(x^2-a^2)y' = (2nx+\lambda)y$; λ sera valeur propre de φ si et seulement si cette équation admet une solution polynomiale non nulle de degré au plus $2n$. Comme on manipule des polynômes, on peut se limiter à l'intervalle $I =]a, +\infty[$, sur lequel x^2-a^2 ne s'annule pas.

- Premier cas : $a \neq 0$.
  La solution de (E) sur I est :
  $$y(x) = K(x-a)^{n+\frac{\lambda}{2a}}(x+a)^{n-\frac{\lambda}{2a}}.$$
  Si les deux exposants sont des entiers naturels, on aura bien une solution polynomiale de degré au plus $2n$ (on pourrait montrer que cette condition est également nécessaire, mais ce ne sera pas utile). Ainsi, pour $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, la valeur $\lambda_k = \dfrac{k-n}{2a}$ est valeur propre de φ associée au vecteur propre $(X-a)^k(X+a)^{2n-k}$. Comme on a trouvé $2n+1$ valeurs propres distinctes et que E est de dimension $2n+1$, on a toutes les valeurs propres. Ainsi, φ est diagonalisable et la famille $\left((X-a)^k(X+a)^{2n-k}\right)_{0\leq k\leq 2n}$ est une base de vecteurs propres.

- si $a = 0$, l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle sur $I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ est engendré par la fonction :
  $$y(x) = x^{2n}e^{-\lambda/x}.$$
  Si $\lambda > 0$, on travaille sur $]-\infty, 0[$ et $y(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^-. De même, si $\lambda < 0$, on travaille sur $]0, +\infty[$ et $y(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 0^+. La seule possibilité pour avoir un polynôme est de choisir $\lambda = 0$, qui est donc la seule valeur propre de φ, associée à l'espace propre $\text{Vect}(X^{2n})$.

17) Comme χ_M est scindé, on peut trigonaliser M : il existe $Q \in GL_n(K)$ tel que $Q^{-1}MQ = \Delta$ est triangulaire supérieure, de diagonale égale à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On en déduit que $Q^{-1}P(M)Q = P(\Delta)$ est triangulaire supérieure, de diagonale égale à $(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$. Nous avons donc :
$$\chi_{P(M)} = \prod_{i=1}^{n}(X - P(\lambda_i)).$$

18) On remarque que $J^0 = M(1, 0, \ldots, 0)$, $J = M(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $J^2 = M(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $J^{n-1} = M(0, \ldots, 0, 1)$. On a donc :
$$M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = P(J) \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Xk.$$
Il suffit donc de diagonaliser J pour diagonaliser toutes les matrices $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Comme le polynôme minimal de J est $X^n - 1$, ce polynôme est aussi son polynôme caractéritique (car π_J divise ch_J, qui est de degré n). J a donc n valeurs propres distinctes, qui sont les racines n-ièmes de l'unité. Si λ est un telle racine, l'espace propre associé est engendré par le vecteur $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n racines n-ièmes de l'unité, la matrice de Vandermonde
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

diagonalise $M(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$:

$$P^{-1}M(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})P = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

19) Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(K)$ et $f: \ X \longmapsto AX$ l'endomorphisme de K^3 canoniquement associé à A. Nous allons faire une disjonction des cas selon l'indice de nilpotence de A.

- Si $f = 0$, $A = A_1$.

- Si $f \neq 0$ et $f^2 = 0$, on a $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$; comme la somme des dimensions de ces deux espaces est égale à 3 (formule du rang), on a $\text{rg}(f) = 1$ et $\text{Ker}(f)$ est un plan. On peut donc choisir un vecteur e_2 en dehors de ce noyau et poser $e_1 = f(e_2)$; e_1 est lors un élément non nul de $\text{Ker}(f)$ et on peut choisir e_3 qui complète e_1 en une base du noyau. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de K^3 vérifiant : $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 0$, donc A est semblable à A_2 (A est la matrice de f dans la base canonique et A_2 sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

- Si $f^2 \neq 0$, on a $f^3 = 0$ (l'indice de nilpotence ne peut pas dépasser la dimension de l'espace). On choisit e_3 tel que $f^2(e_3) \neq 0$ et on pose $e_2 = f(e_3)$ et $e_1 = f(e_2)$. On montre facilement que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de K^3 : A est semblable à $A_2 = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.

20) a) Si f est inversible, $f \circ g = 0$ donne $g = 0$; en choisissant une base qui trigonalise f (c'est possible car le corps de base est $\mathbb{C}$: χ_f est scindé), on trigonalise f et g simultanément.

b) Si $x \in \text{Ker}\,(f)$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}\,(f)$: le noyau de f est stable par g.

Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de E. Le résultat est évident si E est de dimension 1 (toute base trigonalise f et g puisqu'une matrice de taille 1 est triangulaire). Supposons que $n = \dim(E) \geq 2$ et que le résultat ait été démontré en dimension $n-1$. On fixe $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Si f est inversible, le a) permet de conclure ; sinon, la restriction de g à $\text{Ker}\,(f)$ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\text{Ker}\,(f)$, qui est de dimension non nulle : il admet donc au moins une valeur propre μ_1 et un vecteur propre associé e_1. Nous avons donc $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $g(e_1) = \mu_1 e_1$ avec $\lambda_1 = 0$. Choisissons un supplémentaire F de $\text{Vect}(e_1)$ et une base $\mathcal{B}'_0 = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de F. $\mathcal{B}_0 = (e_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est alors une base de E et

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X' \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}(g, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \mu_1 & Y' \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $X', Y' \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$. La condition $f \circ g = 0$ donne $A'B' = 0$. En notant f' et g' les endomorphismes de F définis par $A' = \text{Mat}(f', \mathcal{B}'_0)$ et $B' = \text{Mat}(g', \mathcal{B}'_0)$, on a $f' \circ g' = 0$: l'hypothèse de récurrence s'applique et il existe une base $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_n)$ de F telle que $A = \text{Mat}(f', \mathcal{B}')$ et $B = \text{Mat}(g', \mathcal{B}')$ sont triangulaire supérieures. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base de E et

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & A \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}(g, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \mu_1 & Y \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont triangulaires supérieures.

21) Soit $\lambda \in K$. On a, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$F(u) = \lambda u \Longleftrightarrow u \circ (f - \lambda Id) = 0 \Longleftrightarrow \text{Im}(f - \lambda Id) \subset \text{Ker}\,(u)\,.$$

Si λ n'est pas valeur propre de f, $\text{Im}(f - \lambda Id) = E$ et seul $u = 0$ vérifie $F(u) = \lambda u$. Sinon, λ est valeur propre de F associé à l'espace propre :

$$\mathcal{L}(E)_\lambda = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \text{Im}(f - \lambda Id) \subset \text{Ker}\,(u)\}.$$

Pour calculer la dimension de cet espace, travaillons matriciellement : fixons une base $(e_1,\dots,e_r)$ de $\mathrm{Im}(f-\lambda Id)$, complétée en une base $\mathcal{B}$ de E. On a alors :

$$u\in\mathcal{L}(E)_\lambda \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix}0 & A\end{pmatrix} \text{ avec } A\in\mathcal{M}_{n,n-r}.$$

On en déduit que $\mathcal{L}(E)_\lambda$ est de dimension $n(n-r)$, i.e. $n\dim(E_\lambda)$ où E_λ est l'espace propre pour f associé à λ.

Les endomorphismes f et F ont alors le même spectre et :

$$\begin{aligned}
F \text{ est diagonalisable} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in Sp(F)} \dim\left(\mathcal{L}(E)_\lambda\right)=n^2\\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in Sp(f)} n\dim\left(E_\lambda\right)=n^2\\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in Sp(f)} \dim\left(E_\lambda\right)=n\\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

On a le même résultat avec G. On peut le démontrer de la même façon :

$$G(u)=\lambda u \Longleftrightarrow (f-\lambda Id)\circ u=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u)\subset \mathrm{Ker}\left(()\, f-\lambda Id\right)$$

donc $\mathrm{Sp}(G)=\mathrm{Sp}(f)$ et, pour λ valeur propre de f, on montre que l'espace propre de G associé à λ est aussi de dimension $n\dim(E_\lambda)$ (en choisissant une base $(e_1,\dots,e_k)$ de $\mathrm{Ker}\left(()\, f-\lambda Id\right)$ complétée en une base $\mathcal{B}$ de E, les éléments de $\mathrm{Ker}(G-\lambda Id)$ sont les endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_{k,n}$).

On peut aussi travailler sur G par "dualité". Le plus facile est de remplacer les endomorphismes par des matrices ; nous avons démontré avec le travail sur F le résultat :

Pour $A\in\mathcal{M}_n(K)$, l'endomorphisme F_A de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par $F(M)=MA$ est diagonalisable si et seulement A est diagonalisable.

En posant $G_A:\ M\longmapsto AM$, nous avons $G_A=\varphi^{-1}\circ F_{A^\top}\circ\varphi$ avec $\varphi:\ M\longmapsto M^\top$. On en déduit donc :

$$G_A \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow\ F_{A^\top} \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow\ A^\top \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow\ A \text{ est diagonalisable.}$$

22) a) Un calcul rapide donne $\chi_{A_1}=(X-2)^2(X-4)$; comme $\mathrm{rg}(A-2I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}=1$, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2 et A_1 est diagonalisable, semblable à $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

Comme $B_1={A_1}^\top$, C_1 est également diagonalisable et semblable à D : A_1 et B_1 sont semblables.

b) On a $A_2^2=0$, donc $\mathrm{Im}(A_2)\subset\mathrm{Ker}(A_2)$. Par la formule du rang, on en déduit que $\mathrm{Ker}(A_2)$ est de dimension 2 : on peut donc choisir $e_3\in\mathbb{C}^3$ tel que $A_2(e_3)\neq 0$, par exemple $e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On pose alors $e_2=A_2e_3=\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$. On complète e_2 en une base (e_1,e_2) du noyau de $\mathrm{Ker}(A_2)$: comme l'équation de ce noyau est $x+jy+j^2z=0$, le vecteur $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient.

La famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est alors une base de $\mathbb{C}^3$ et l'endomorphisme $X\longmapsto A_2X$ a pour matrice B_2 dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons ainsi :

$$P^{-1}A_2P=B_2 \text{ avec } P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&0\\1&j^2&0\end{pmatrix}$$

c) Les matrices A_3 et B_3 ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang ($\mathrm{rg}(A_3) = 2$ et $\mathrm{rg}(B_3) = 3$).

23) a) On a $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, donc $P' = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ i\neq j}} (X - \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{X - \lambda_i}$.

D'autre part, pour i fixé, on peut écrire (en posant $a_n = 1$ pour simplifier l'écriture) :

$$\begin{aligned} P &= a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= (X - \lambda_i)\Big(a_n X^{n-1} + (a_{n-1} + \lambda_i a_n)X^{n-2} + \cdots \\ &\qquad \cdots + (a_{n-k} + \lambda_i a_{n-k+1} + \cdots + \lambda_i^k a_n)X^{n-k-1} + \cdots + (a_1 + \lambda_i a_2 + \cdots + \lambda_i^{n-1} a_n)X^0\Big) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall i,\ \frac{P}{X - \lambda_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k + \lambda_i a_{k+1} + \cdots + a_n \lambda^{n-k}\right) X^{k-1}$$

En sommant sur i, on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = P' = \sum_{k=1}^{n} \left(n a_k + a_{k+1}S_1 + \cdots + a_n S_{n-k}\right) X^{k-1}$$

et donc par identification :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ 0 = (n-k)a_k + a_{k+1}S_1 + \cdots + a_n S_{n-k}$$

La valeur $k = n$ donne $0 = 0$: on a donc $n-1$ relations utiles, qui font intervenir $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ mais pas S_n. On obtient une dernière relation en écrivant :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) = n a_0 + a_1 S_1 + \cdots + a_n S_n$$

ce qui donne les n relations demandées :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ 0 = (n-k)a_k + a_{k+1}S_1 + \cdots + a_n S_{n-k}$$

b) Le résultat précédent montre que si l'on connaît les coefficients $a_0, \ldots, a_{n-1}$, on peut calculer les valeurs $S_1, \ldots, S_n$ (comme $a_n = 1$ est non nul, on a système triangulaire inversible d'inconnues $S_1, S_2, \ldots, S_n$).

Comme les $n-k$ sont non nuls (pour $0 \leq k \leq n-1$), on peut également voir ce système comme un système triangulaire inversible d'inconnues $a_0, \ldots, a_{n-1}$: cela permet de calculer $a_0, \ldots, a_{n-1}$ en fonction de $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Autrement-dit, pour deux polynômes P et Q unitaires de degrés n tels que :

$$\begin{cases} P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_n) \\ Q = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0 = (X - \mu_1)\ldots(X - \mu_n) \end{cases}$$

on a :

$$P = Q \Longleftrightarrow \Big(\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ a_j = b_j\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^j\Big)$$

En appliquant ceci à χ_A et χ_B, on obtient :

$$\chi_A = \chi_B \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \mathrm{Tr}(A^j) = \mathrm{Tr}(B^j).$$

c) Pour $P = (X-1)^n$, on a $S_k = n$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On en déduit que les solutions du problème sont les matrices A telles que $\chi_A = (X-1)^n$.

24) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on peut trigonaliser A : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = D + N$$

où D est diagonale et N triangulaire supérieure stricte. On peut alors écrire $D = D_1 + D_2$ avec D_1, D_2 diagonales de sorte que tous les termes diagonaux de D_1 (resp. de D_2) soient distincts deux à deux. On peut par exemple noter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les termes diagonaux de D puis :

- on pose $\alpha_1 = \lambda_1$ et $\beta_1 = 0$: on a $\alpha_1 + \beta_1 = \lambda_1$;
- on choisit α_2 distinct de α_1 et de $\lambda_2 - \beta_1$; on pose $\beta_2 = \lambda_2 - \alpha_2$ et on a $\alpha_2 + \beta_2 = \lambda_2$ avec α_1, α_2 distincts et β_1, β_2 distincts ;
- pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, si on suppose $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ construits, on choisit $\alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ tel que :

  $$\alpha_{k+1} \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \lambda_{k+1} - \beta_1, \ldots, \lambda_{k+1} - \beta_k\}.$$

  On pose $\beta_{k+1} = \lambda_{k+1} - \alpha_{k+1}$.

Arrivé au rang n, les matrices $D_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $D_2 = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ conviennent. Nous avons donc :

$$A = PA_1P^{-1} + PA_2P^{-1}$$

et les matrices PA_1P^{-1} et PA_2P^{-1} sont diagonalisables, puisqu'elles ont chacune n valeurs propres distinctes.

25) Soit A une solution. Si r est le rang de A, on peut écrire :

$$A = PJ_rQ^{-1} \text{ avec } P, Q \in GL_n(K) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre alors facilement que J_r est également solution du problème : ceci impose $r = 0$ ou $n = 1$. En effet, si $1 \leq r$ et $n \geq 2$, on choisit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et on a $0 = \det(J_r) + \det(C) = \det(J_r + C) = \det(I_n) = 1$, qui est absurde. Quand $n \geq 2$, la seule solution est donc la matrice nulle. Par contre, toutes les matrices A sont solutions quand $n = 1$.

26) En échangeant l'ordre des vecteurs, on montre que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$A' = \begin{pmatrix} a+b & a & 0 \\ a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

La matrice $B = \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ a pour valeurs propre $b + 2a$ (somme des lignes) et b (en calculant la trace), associées aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$B = P \begin{pmatrix} b+2a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = P \begin{pmatrix} (b+2a)^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (b+2a)^n + b^n & (b+2a)^n - b^n \\ (b+2a)^n - b^n & (b+2a)^n + b^n \end{pmatrix}$$

puis :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(b+2a)^n + b^n}{2} & 0 & \dfrac{(b+2a)^n - b^n}{2} \\ 0 & b^n & 0 \\ \dfrac{(b+2a)^n - b^n}{2} & 0 & \dfrac{(b+2a)^n + b^n}{2} \end{pmatrix}.$$

27) Soit $M \in \mathcal{M}_3(K)$ telle que $M^4 = M^2$. Le polynôme $P = x^2(X^2-1)$ est donc annulateur de M. On peut donc écrire (lemme des noyaux) :

$$K^3 = \operatorname{Ker}(M^2) \oplus \operatorname{Ker}(M - I_3) \oplus \operatorname{Ker}(M + I_3).$$

Si $\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{Ker}(M^2)$, M est diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{-1, 0, 1\}.$$

Sinon, $\operatorname{Ker}(M^2)$ est soit de dimension 2, soit de dimension 3. Dans le premier cas, la restriction de M à $\operatorname{Ker}(M^2)$ est nilpotente d'indice 2, donc elle a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie : A est semblable à

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \in \{-1, 1\}.$$

Dans le second cas, A est nilpotente d'indice 2, donc A est semblable à

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une vérification élémentaire montre que les matrices D, Δ_1 et Δ_2 sont solutions. Les matrices M de $\mathcal{M}_3(K)$ vérifiant $M^2 = M^4$ sont donc les matrices semblables à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{-1, 0, 1\}.$$

28) Analyse : supposons que A est solution du problème.

Premier cas : A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. A^2 et A^3 sont semblables donc les triplets $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ et $(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3)$ sont égaux à une permutation σ près. Quitte à changer l'ordre des λ_i, il suffit d'étudier trois permutations :

- $\sigma = Id$; $\lambda_i^2 = \lambda_i^3$ pour tout i, donc quitte à changer l'ordre des λ_i, nous avons :

  $$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,0,0)\} = \mathcal{S}_1.$$

- $\sigma = (1,2)$; on a $\lambda_1^2 = \lambda_2^3$, $\lambda_2^2 = \lambda_1^3$ et $\lambda_3^2 = \lambda_3^3$. On en déduit que $\lambda_1^4 = \lambda_2^6 = \lambda_1^9$, d'où $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1^5 = 1$; on obtient par symétrie $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2^5 = 1$. Si $\lambda_1 \in \{0,1\}$ ou $\lambda_2 \in \{0,1\}$, on est dans la même situation qu'avec $\sigma = Id$. En notant $\alpha = e^{2i\pi/5}$, nous pouvons donc supposer que $\lambda_1 = \alpha^p$ et $\lambda_2 = \alpha^q$, avec $1 \leq p, q \leq 4$. Nous avons alors $2p \equiv 3q$ [5] et $2q \equiv 3p$ [5], ce qui équivaut à $4p \equiv q$ [5]. Nous avons donc deux possibilités : $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\alpha, \alpha^4\}$ ou $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\alpha^2, \alpha^3\}$. Quitte à échanger λ_1 et λ_2, nous avons :

  $$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{(\alpha, \alpha^4, 0), (\alpha^2, \alpha^3, 0), (\alpha, \alpha^4, 1), (\alpha^2, \alpha^3, 1)\} = \mathcal{S}_2,$$

  puisque $\lambda_3 \in \{0, 1\}$.

- $\sigma = (1,2,3)$; $\lambda_1^2 = \lambda_2^3$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^3$ et $\lambda_3^2 = \lambda_2^3$. Nous avons $\lambda_i^8 = \lambda_i^{27}$ pour tout i. Si l'un des λ_i vaut 0 ou 1, on est à nouveau dans le cas $\sigma = Id$. Sinon, en posant $\beta = e^{2i\pi/19}$, on a $\lambda_1 = \beta^p$, $\lambda_2 = \beta^q$ et $\lambda_3 = \beta^r$ avec $1 \leq p, q, r \leq 18$, on a :

  $$2p \equiv 3q \text{ [19]}, \ 2q \equiv 3r \text{ [19] et } 2r \equiv 3q \text{ [19]},$$

ce qui donne (13 est l'inverse de 3 modulo 19) :

$$7p \equiv q\ [19],\ \ 11p \equiv r\ [19]$$

Quitte à réordonner les λ_i, nous avons donc 6 possibilités :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{(\beta, \beta^7, \beta^{11}), (\beta^2, \beta^3, \beta^{14}), (\beta^4, \beta^6, \beta^9), (\beta^5, \beta^{16}, \beta^{17}), (\beta^8, \beta^{12}, \beta^{18}), (\beta^{10}, \beta^{13}, \beta^{15})\} = \mathcal{S}_3$$

Nous avons donc montré que A est semblable à l'une des 14 matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3.$$

Deuxième cas : A possède une valeur propre double λ_1 (associée à un espace propre de dimension 1) et une valeur propre simple λ_3. A est alors semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et :

$$A^2 \sim \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 \sim \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix}$$

A^2 et A^3 ont les même valeurs propres. Si elles ont une valeur propre triple, cela impose $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ et $\lambda_1^3 = \lambda_2^3$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\lambda_2 = -\lambda_1$, puis $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = -\lambda_1^3$, ce qui impose $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$: c'est absurde ; on en déduit que A^2 et A^3 ont deux valeurs propres distinctes, λ_1^2 (resp. λ_1^3) valeur propre double pour A^2 (resp. pour A^3) et λ_2^2 (resp. λ_2^3) valeur propre simple pour A^2 (resp. pour A^3). On a donc $\lambda_1^2 = \lambda_1^3$ et $\lambda_2^2 = \lambda_2^3$, ce qui impose $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, 1\}$ et A est semblable à l'une des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Troisième cas : A possède une valeur propre triple λ. On obtient facilement $\lambda^2 = \lambda^3$, et donc $\lambda \in \{0, 1\}$. Comme $A - \lambda I_3$ est nilpotente non nulle, A est semblable à soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

La seconde matrice doit être exclue quand $\lambda = 0$, car avec $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Nous obtenons donc que A est semblable à l'une des trois matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Synthèse : on vérifie facilement que, réciproquement, toute matrice semblable à l'une des 19 matrices décrites dans l'analyse est solution.

Remarque : nous utilisons des résultats qui sont à la limite du programme, mais qui se montrent assez facilement en dimension 3 :

- si f est un endomorphisme nilpotent d'un espace E de dimension 3, il existe une base dans laquelle la matrice de f est l'une des trois matrices :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- si f est un endomorphisme d'un espace E de dimension 3 et si $\chi_f = (X-\lambda)^2(X-\mu)$ avec $\lambda \neq \mu$, l'espace $\mathrm{Ker}\left((f-\lambda Id)^2\right)$ est de dimension 2 et il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est l'une des deux matrices :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

29) Si A est nilpotente d'indice n, on peut choisir un vecteur e de K^n tel que $A^{n-1}e \neq 0$. On en déduit facilement que $\mathcal{B} = (A^{n-1}e, A^{n-2}e, \ldots, Ae, e)$ est une base de K^n. Si P est la matrice de passage de la base canonique de K^n à $\mathcal{B}$, $P^{-1}AP = J$.

Remarque : il est plus facile de traiter ce problème vectoriellement. Si f est un endomorphisme nilpotent d'indice n d'un espace vectoriel E de dimension n, on peut choisir $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$. La famille $(f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), \ldots, f(e), e)$ est alors une base de E dans laquelle la matrice de f est égale à J.

30) a) L'idée est de chercher les vecteurs propres de M sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Nous avons, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathbb{C}^{2n}$:
$$MZ = \lambda Z \iff \begin{cases} Y = \lambda\, X \\ 2AX + AY = \lambda Y \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda\, X \\ (2+\lambda)AX = \lambda^2 X \end{cases}.$$

Si $\lambda = -2$, ce système a pour seule solution $(X = 0, Y = 0)$, donc -2 n'est pas valeur propre de M.

Pour $\lambda \neq -2$, $Z \in F(\lambda) \iff X \in E\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\right)$ et $Y = \lambda X$. On en déduit que $X \longmapsto (X, \lambda X)$ est un isomorphisme de $E\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\right)$ sur $F(\lambda)$: les deux espaces ont donc même dimension.

b) Pour $\mu \in \mathbb{C}$, nous avons :

- si $\mu = 0$, $X^2 - \mu X - 2\mu$ a une racine double $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0$;
- si $\mu = -8$, $X^2 - \mu X - 2\mu$ a 4 pour racine double $\lambda_1(-8) = \lambda_2(-8) = 4$;
- sinon, $X^2 - \mu X - 2\mu$ a deux racines simples $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$.

Pour tout complexe λ autre que -2, on a $\lambda \in \{\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu)\}$ avec $\mu = \frac{\lambda^2}{\lambda+2}$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} N = \dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} F(\lambda)\right) &= \dim(F(0)) + \dim(F(4)) + \sum_{\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0,-8\}} \dim\left(F(\lambda_1(\mu))\right) + \dim\left(F(\lambda_2(\mu))\right) \\ &= \dim(E(0)) + \dim(E(-8)) + 2\sum_{\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0,-8\}} \dim\left(E(\mu)\right) \end{aligned}$$

Comme $\dim(E(0)) + \dim(E(-8)) + \sum_{\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0,-8\}} \dim\left(E(\mu)\right) \leq n$, on a :
$$M \text{ est diagonalisable } \iff N = 2n \iff \dim(E(0)) = \dim(E(-8)) = 0 \text{ et } \sum_{\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0,-8\}} \dim\left(E(\mu)\right) = n$$

ce qui prouve que M est diagonalisable si et seulement A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) \cap \{0, -8\} = \emptyset$.

31) On rappelle la relation importante :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ (\mathrm{Com}\, A)^\top A = A\,(\mathrm{Com}\, A)^\top = \det A\, I_n.$$

a) Notons $\chi_A = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ (on a $a_n = 1$ et $a_0 = (-1)^n \det A$).

Si A est inversible, nous pouvons écrire $(\mathrm{Com}\, A)^\top = (\det A)A^{-1}$, puis utiliser deux résultats élémentaires :

- si A est inversible, $\chi_{A^{-1}} = \dfrac{1}{a_0}\,(a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0X^n)$;

- pour tous $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_{\alpha M}(\lambda) = \alpha^n \chi_M(\lambda/\alpha)$.

Ces deux égalités se démontrent facilement en revenant à la définition du polynôme caractéristique. Par exemple :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A^{-1}) = \det\left(-\lambda A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}I_n - A\right)\right) = \frac{(-1)^n\lambda^n}{\det A}\,\chi_A(1/\lambda)$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $a_0 = (-1)^n \det A$ et $\lambda^n\chi_A(1/\lambda) = a_n + a_{n-1}\lambda + \cdots + a_0\lambda^n$.

Nous obtenons donc, en posant $\varepsilon = (-1)^n$:

$$\chi_{(\mathrm{Com}\,A)^\top}(\lambda) = \lambda^n + \varepsilon a_1\lambda^{n-1} + \varepsilon^2 a_2 a_0 \lambda^{n-2} + \cdots + \varepsilon^k a_k a_0^{k-1}\lambda^k + \cdots + \varepsilon_n a_n a_0^{n-1}.$$

Si A n'est pas inversible, on peut appliquer le résultat précédent à $A - \mu I_n$ pour tout $\mu \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Sp}(A)$: en notant $a_i(A)$ le coefficient de λ^i de χ_A, nous avons pour λ complexe fixé :

$$\chi_{(\mathrm{Com}\,(A-\mu I_n))^\top}(\lambda) = \lambda^n + \varepsilon a_1(A-\mu I_n)\lambda^{n-1} + \cdots + \varepsilon^k a_k(A-\mu I_n)a_0^{k-1}(A-\mu I_n)\lambda^k + \cdots + \varepsilon_n a_n(A-\mu I_n)a_0^{n-1}(A-\mu I_n)$$

pour tout $\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(A)$. Les deux membres de l'égalité sont des polynômes en μ, qui coïncident en une infinité de valeurs : ils sont donc également égaux pour $\mu = 0$.

b) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Si λ est non nul, on peut écrire :

$$(\det A)I_n X = \widetilde{A}AX = \widetilde{A}(\lambda X) = \lambda\widetilde{A}X$$

donc X est vecteur propre de $\widetilde{A}$ pour la valeur propre $\dfrac{\det A}{\lambda}$.

Si $\lambda = 0$, on utilise cette fois l'égalité $A\widetilde{A}X = (\det A)\,X = 0$. On a alors deux cas :

- si A est de rang $n-1$, le noyau de A est de dimension 1 : X en est donc une base et comme $\widetilde{A}X \in \mathrm{Ker}\,(A)$, il existe μ tel que $\widetilde{A}X = \mu X$: X est un vecteur propre de $\widetilde{A}$.

- sinon, $\widetilde{A}$ est nulle (tous les déterminants de taille $n-1$ extraits de A sont nuls) et X, vecteur non nul, est vecteur propre de $\widetilde{A}$.

c) (i) Comme A n'est pas inversible, $a_0 = 0$, ce qui donne :

$$\chi_{\widetilde{A}}(\lambda) = \lambda^n + \varepsilon a_1 \lambda^{n-1}$$

On en déduit que $\widetilde{A}$ est de trace non nulle si et seulement si $a_1 \neq 0$ (au signe près, la trace est le coefficient de degré $n-1$ du polynôme caractéristique), soit si et seulement si 0 est racine simple de χ_A.

(ii) si 0 est valeur propre simple de $\widetilde{A}$, le noyau de A est de dimension 1 et A est de rang $n-1$. Comme $\widetilde{A}\,A = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\left(\widetilde{A}\right)$, donc $\mathrm{Ker}\left(\widetilde{A}\right)$ est de dimension au moins $n-1$. Ceci prouve que 0 est valeur propre de $\widetilde{A}$ d'ordre au moins $n-1$: comme la trace α de $\widetilde{A}$ est non nulle, α est la dernière valeur propre de $\widetilde{A}$ (la trace est la somme dessaleurs propres). On en déduit que $\chi_{\widetilde{A}} = X^{n-1}(X-\alpha)$ et que $\widetilde{A}$ est diagonalisable car elle a deux valeurs propres, d'ordre $n-1$ et 1, dont les espaces propres sont de dimension $n-1$ et 1.

(iii) La condition $\mathrm{rg} A) = n-1$ n'est pas suffisante, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle (et cela donne aussi un contre-exemple pour la question (ii)).

Remarque : il est possible d'utiliser une autre approche pour étudier $\widetilde{A}$; en effet, on a :

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{C}),\ \widetilde{A}\,\widetilde{B} = (\det A)\,A^{-1}\,(\det B)\,B^{-1} = \det(BA)\,(BA)^{-1} = \widetilde{BA}$$

et par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et continuité de $M \longmapsto \widetilde{M}$, on peut prolonger cette propriété :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \widetilde{A}\,\widetilde{B} = \widetilde{BA}.$$

En particulier, pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{P}\,\widetilde{P^{-1}} = \widetilde{I}_n = I_n$, donc $(\widetilde{P})^{-1} = \widetilde{P^{-1}}$. On en déduit que si A et B sont semblables, avec $B = P^{-1}AP$, alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont semblables :

$$\widetilde{B} = \widetilde{P}\,\widetilde{A}\,\widetilde{P^{-1}} = \widetilde{P}\,\widetilde{A}\,(\widetilde{P})^{-1}.$$

Ainsi, en trigonalisant A, on peut supposer que B est triangulaire, de diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, et la matrice $\widetilde{B}$ est elle aussi triangulaire, de diagonale $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k$ pour tout k. On en déduit les relations :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \text{ et } \chi_{\widetilde{A}} = \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(X - \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k\right).$$

Si λ_1 est nul, $\mu_2, \dots, \mu_n$ sont nul et $tr\widetilde{A} = \mu_1 = \lambda_2 \dots \lambda_n$ est non nul si et seulement si 0 est valeur propre simple de A.

Ainsi, si 0 est valeur propre simple de A, 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ de $\widetilde{A}$ (avec un espace propre de dimension $n-1$ car $\operatorname{rg}\left(\widetilde{A}\right) \leq 1$) et μ_1 est valeur propre d'ordre 1 : $\widetilde{A}$ est diagonalisable.

32) Si A est inversible, on a $BA = A^{-1}ABA$, donc AB et BA sont semblables : elles ont même polynôme caractéristique.

Si A n'est pas inversible, il existe $\rho > 0$ tel que $A_x = A - xI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $x \in]0, \rho[$. En effet, A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres : on choisit $\rho > 0$ quelconque si A n'a pas de valeur propre strictement positive et $\rho = \min(\mathrm{Sp}(A) \cap]0, +\infty[)$ sinon.

On déduit de l'étude du premier cas :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0, \rho[,\ \det(\lambda I_n - A_x B) = \det(\lambda I_n - BA_x)$$

ce qui donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$$

en faisant tendre x vers 0^+ (l'application déterminant est continue car polynômiale).

33) A est diagonalisable (elle a deux valeurs propres distinctes 3 et 1) et on a :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D \text{ avec } P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ D & 0 & 0 & D \\ D & 0 & 0 & D \\ D & D & D & D \end{pmatrix} = C \text{ avec } P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1 \end{pmatrix}.$$

On peut ensuite regrouper les 0 de C (si C est la matrice d'un f dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_8)$, on écrit la matrice de f dans la base $(e_1, e_3, e_5, e_7, e_2, e_4, e_6, e_8)$:

$$Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = D \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable :

- J est de rang 2 et $e_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 1, -1, 0)$ forment une base de son noyau ;
- $1 + \sqrt{5}$ et $1 - \sqrt{5}$ sont des valeurs propres simples de J, associés aux vecteurs propres $e_3 = \Big(1 + \sqrt{5}, 2, 2, 1 + \sqrt{5}\Big)$ et $e_4 = \Big(1 - \sqrt{5}, 2, 2, 1 - \sqrt{5}\Big)$.

Nous avons donc :

$$(R_1)^{-1} J R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ avec } R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

puis

$$R^{-1} D R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1+\sqrt{5}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3(1-\sqrt{5}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \text{ avec } R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons ainsi :

$$S^{-1} B S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1+\sqrt{5}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\sqrt{5}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } S = PQR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -1 & 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

34) a) Pour $g, h \in G$, on a $ghgh = (gh)^2 = 1$, donc $g(ghgh)h = gh$, soit $hg = gh$: le groupe G est abélien.

b) Comme le polynôme $X^2 - 1$ est scindé à racines simples (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $1 + 1 \neq 0$), les matrices $A \in G$ sont diagonalisables et commutent deux à deux (d'après le a). Le théorème de diagonalisation simultanée prouve que les éléments de G sont simultanément diagonalisables. On peut démontrer ce résultat classique par récurrence dans ce cas particulier :

$(\mathcal{P}_n)$: pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ avec $A^2 = I_n$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $AB = BA$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale pour tout $A \in \mathcal{A}$.

- si $n = 1$, le résultat est évident car toutes les matrices de taille 1 sont diagonales ;

- soit $n \geq 2$ et supposons le résultat démontré dans $\mathcal{M}_k(K)$ pour tout $k < n$. Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant les conditions imposées, deux cas se présentent : si $\mathcal{A}$ ne contient que des homothéties (i.e. $\mathcal{A} \subset \{I_n, -I_n\}$), toute matrice P inversible convient. Sinon, il existe $A_0 \in \mathcal{A}$ telle que A_0 est semblable à $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ avec $0 < p < n$ et $0 < q < n$. En notant $Q \in GL_n(K)$ telle que $Q^{-1}A_0Q = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathcal{M}_p(K) \text{ et } A_2 \in \mathcal{M}_q(K)$$

(les espaces propres de A_0 sont stables par A car A et A_0 commutent).
On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence aux familles $\mathcal{A}_1 = \{A_1,\ A \in \mathcal{A}\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{A_2,\ A \in \mathcal{A}\}$ (car $1 \leq p < n$ et $1 \leq q < n$) : il existe deux matrices $P_1 \in GL_p(K)$ et $P_2 \in GL_q(K)$ telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P_1^{-1}A_1P_1$ et $P_2^{-1}A_2P_2$ soient diagonales. En posant $P = Q \times \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & 0 \\ 0 & P^{-2}A_2P_2 \end{pmatrix} \text{ diagonale}$$

et $(\mathcal{P}_n)$ est démontrée.

Ainsi, pour chaque $A \in G$, il existe $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que G possède au plus 2^n éléments, puisque l'application

$$\varphi :\ (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n) \longmapsto P \times \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

est injective et G est contenu dans $\varphi(\{-1, 1\}^n)$.

c) Montrons le résultat par contraposée : supposons que Φ est un isomorphisme de groupe de $GL_m(K)$ sur $GL_n(K)$. L'ensemble

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix},\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\} \right\}$$

est alors un sous-groupe de $GL_m(K)$ vérifiant les conditions de la question b). Par isomorphisme, on en déduit que $G = \Phi(H)$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$ vérifiant ces mêmes conditions : nous avons donc

$$2^m = \mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(G) \leq 2^n,$$

donc $m \leq n$; par symétrie, $n \leq m$ et donc $n = m$.

35) Nous avons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Nous allons montrer que les matrices B qui commutent avec J sont les matrices de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k.$$

En notant $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice qui commute avec J, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} \\ 0 & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n-1} \end{pmatrix} = BJ = JB = \begin{pmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \dots & b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\begin{cases} b_{n,1} = 0 \\ b_{n-1,1} = b_{n,2} = 0 \\ b_{n-2,1} = b_{n-1,2} = b_{n,3} = 0 \\ \vdots \\ b_{2,1} = b_{3,2} = \dots = b_{n,n-1} = 0 \\ b_{1,1} = b_{2,2} = \dots = b_{n,n} = \alpha_0 \\ b_{1,2} = b_{2,3} = \dots = b_{n-1,n} = \alpha_1 \\ \vdots \\ b_{1,n-1} = b_{2,n} = \alpha_{n-2} \\ b_{1,n} = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

et donc $B = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k$. Réciproquement, toute matrice de ce type commute avec J (pour tout polynôme P et pour toute matrice carrée A, $P(A)$ commute avec A).

b) Nous allons commencer par trouver une solution particulière de l'équation $B^2 = 1_n + J$. On peut penser à utiliser le développement limité de la fonction $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k + O(x^n) \text{ avec } \forall k,\ \alpha_k = \binom{k}{1/2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2^k\, k!}\, 1 \times 3 \times \dots \times (2k-3) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

En élevant au carré ce développement limité, nous obtenons :

$$1 + x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \alpha_{k-i} \right) x^k + O(x^n)$$

ce qui donne, par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = 1 \\ \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0 = 1 \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \alpha_{k-i} = 0 \quad \text{pour tout } k \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

En posant $B_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k$, nous avons alors (les autres termes de la somme sont nuls car $J^n = 0$) :

$$B_1^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \alpha_{k-i} \right) J^k = I_n + J$$

et donc B_1 est une solution particulière.

Si B est une autre solution, B et B_1 commutent (ce sont toutes les deux des polynômes en J) et donc :

$$0 = B^2 - B_1^2 = (B - B_1)(B + B_1).$$

Si β_0 est le terme diagonale de B, on a :

- si $\beta_0 = 1$, $B + B_1$ est inversible (la matrice est triangulaire et sa diagonale ne contient que des 2) : on a donc $B = B_1$, car on peut simplifier par $B + B_1$;
- sinon, $\beta_0 = -1$ et $B - B_1$ est inversible : $B = -B_1$.

La matrice A possède donc deux racines carrées :

$$B_1 = I_n + \frac{1}{2}\, J + \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} J^k \text{ et } \; B_2 = -B_1.$$

36) Il existe $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = P \wedge Q$. Si $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$:

$$(P \wedge Q)(u)(x) = U(u)(P(u)(x)) + V(u)(Q(u)(x)) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0,$$

donc $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} (P \wedge Q)(u)$.

Il existe également R tel que $R(P \wedge Q) = P$, donc si $x \in \operatorname{Ker} (P \wedge Q)(u)$, $P(u)(x) = R(u)((P \wedge Q)(u)(x)) = R(u)(0) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} P(u)$. On a par symétrie $x \in \operatorname{Ker} Q(u)$, ce qui donne l'inclusion inverse.

37) Si A et B sont semblables, avec $A = P^{-1}BP$, on a :

$$\varphi(A) = \varphi(P^{-1})\varphi(B)\varphi(P) = \varphi(P^{-1})\varphi(P)\varphi(B) = \varphi(I_2)\varphi(B) = \varphi(B).$$

On peut donc travailler sur la classe de similitude de A :

- si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$; on a ensuite :

  $$\varphi(A) = \varphi(D) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \lambda\mu = \det(A)$$

  car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- si A n'est pas diagonalisable, elle a une valeur propre double (on travaille sur $\mathbb{C}$) et est semblable à une matrice de la forme $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

  Si λ est non nul, on peut écrire :

  $$\varphi(\Delta) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

  car $\begin{pmatrix} 1 & 1/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables. On a alors $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est semblable à J, donc $\varphi(J^2) = \varphi(J)$, soit $\varphi(J) \in \{0, 1\}$. Comme J est inversible, $\varphi(J) \neq 0$ (car $\varphi(J)\varphi(J^{-1}) = \varphi(I_2) = 1$) ce qui donne $\varphi(A) = \varphi(\Delta) = \mu^2 = \det(A)$.

  Si λ est nul, on a $\Delta^2 = 0$, donc $(\varphi(\Delta))^2 = \varphi(0) = 0$ (car la matrice nulle est diagonalisable), ce qui donne une nouvelle fois $\varphi(A) = \varphi(\Delta) = 0 = \det(A)$.

38) Remarquons pour commencer que AB est de rang 2 ; comme $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$ et que $\mathrm{rg}(A) \leq 2$ (A a deux colonnes), on en déduit que A est de rang 2 et que $\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Im}(A)$.

Soit X un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ. Nous avons $BAX = \lambda X$, donc $ABAX = \lambda AX$. Comme $X \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, AX est non nul : c'est un vecteur propre pour AB associé à la valeur propre λ. Nous avons donc montré que les valeurs propres de BA sont des valeurs propres de AB. Il est donc intéressant d'étudier le spectre de AB : on obtient facilement $\chi_{AB} = X(X-1)(X-2)$ et nous allons montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de BA. Soit donc $\lambda \in \{1, 2\}$. Il existe $X_\lambda \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $ABX = \lambda X$; comme λ est non nul, X est élément de l'image de AB, donc de l'image de A : il existe donc un unique $Y_\lambda \in \mathbb{R}^2$ (A est injective) tel que $X_\lambda = AY_\lambda$. On a alors $ABAY_\lambda = \lambda AY_\lambda$ et comme A est injective, on obtient $BAY_\lambda = \lambda Y_\lambda$ avec Y_λ non nul : λ est donc valeur propre pour BA, associée au vecteur Y_λ.

Nous avons donc montré que 1 et 2 étaient valeurs propres de BA : comme $BA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce sont ses seuls valeurs propres. Un calcul élémentaire donne par exemple $X_1 = (1, 0, -1)$ et $X_2 = (1, -1, -1)$: les deux antécédents de X_1 et X_2 par A forment une base qui diagonalise BA.

39) La matrice X est de rang r, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}XQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$. Nous avons alors $APJ_rQ^{-1} = PJ_rQ^{-1}B$, donc $CJ_r = J_rD$, en posant $C = P^{-1}AP$ et $D = Q^{-1}BQ$. Comme C et D sont semblables respectivement à A et B, $\chi_A = \chi_C$ et $\chi_B = \chi_D$. Nous avons alors, en écrivant $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$ (avec des matrices de tailles adéquates) :

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que $C_2 = 0$, $D_3 = 0$ et $C_1 = D_1$, ce qui donne :

$$\chi_A = \chi_C = \chi_{C_1}\chi_{C_4} \quad \text{et} \quad \chi_B = \chi_D = \chi_{C_1}\chi_{D_4}$$

et χ_{C_1} est un diviseur commun de χ_A et de χ_B : le pgcd de χ_A et de χ_B est donc de degré au moins r, qui est le degré de χ_{C_1}.

40) Si u est diagonalisable et si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de vecteurs propres pour u, c'est également une base de vecteurs propres pour $P(u)$ (si $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i$) et $P(u)$ est diagonalisable.

Supposons réciproquement que $P(u)$ est diagonalisable. Il existe alors un polynôme simple $Q = \prod_{i=1}^{k}(X - \mu_i)$ tel que $Q(P(u)) = 0$. On a donc $\left(\prod_{i=1}^{k}(P - \mu_i)\right)(u) = 0$ et les polynômes $P_i = P - \mu_i$ étant deux à deux premiers entre eux (pas de racine commune), on peut appliquer le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on peut ensuite écrire $P_i = Q_i \prod_{j=1}^{q}(X - \mu_j)^{m_j}$ où Q_i est à racines simples, $q \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \ldots, \mu_q$ sont distincts et $m_j \geq 2$ pour tout j (les μ_j sont les racines multiples de P_i). On a alors :

$$\mathrm{Ker}(P_i(u)) = \mathrm{Ker}(Q_i(u)) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}((u - \mu_j Id)^{m_j}) \right)$$

Pour tout j, on peut ensuite écrire $P' = P_i' = (X - \mu_j)R$ avec $R \in \mathbb{C}[X]$ (car μ_j est racine multiple de P_i), ce qui donne :

$$P'(u) = (u - \mu_j Id) \circ R(u).$$

Comme $P'(u)$ est inversible, $u - \mu_j Id$ et $R(u)$ le sont également : on en déduit que $\mathrm{Ker}((u - \mu_j Id)^{m_j}) = \{0\}$. Ainsi, nous avons :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(Q_i(u)).$$

Comme les Q_i sont deux à deux premiers entre eux et à racines simples, le polynôme $Q_1 \dots Q_k$ est scindé simple et annule u, qui est donc diagonalisable.

41) a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \geq 0$. On a

$$\det(A^2 + tI_n) = \det(A - i\sqrt{t}I_n)\ \det(A + i\sqrt{t}I_n) = \chi_A(i\sqrt{t})\chi_A(-i\sqrt{t}) = |\chi_A(i\sqrt{t})|^2 \geq 0$$

car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

b) On suppose que n est impair et que l'on peut écrire $-I_n = A^2 + B^2$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \det(A^2 + tI_n) = \det(-(1-t)I_n - B^2) = (-1)^n \det(B^2 + (1-t)I_n) = -\det(B^2 + (1-t)I_n) \leq 0$$

On en déduit que χ_{A^2} est nul sur $[-1, 0]$, ce qui est absurde car χ_{A^2} est un polynôme non nul.

42) Comme g commute avec D^{n+1} (on a $g \circ D^{n+1} = g^{2n+3} = D^{n+1} \circ g$), le noyau de D^{n+1} est stable par g : $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par g. On en déduit en particulier que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par g : en notant g_1 la restriction de g à $\mathbb{R}_1[X]$, g_1^4 puisque D^2 est nulle sur $\mathbb{R}_1[X]$: g_1 est donc nilpotente, donc $g_1^2 = 0$ (l'indice de nilpotence ne peut pas dépasser la dimension de l'espace), ce qui est absurde car $D = g^2$ n'est pas nulle sur $\mathbb{R}_1[X]$.

L'endomorphisme D n'admet donc pas de racine carrée.

43) La matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$, qui a deux racines distinctes 2 et 3. Elle est donc diagonalisable ; si $M^2 = A_1$, M est donc diagonalisable dans la même base que A_1 (les droites propres de A_1 sont stables par M). On en déduit que M a deux valeurs propres α, β de M qui vérifient $\alpha^2 = 2$ et $\beta^2 = 3$, ce qui est absurde car les carrés dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont 0, 1 et 4 : l'équation $M^2 = A_1$ n'a pas de solutions.

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$, qui a deux racines distinctes 1 et 4. On obtient facilement une base de vecteur propre et la relation :

$$P^{-1}A_2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En posant $M = P^{-1}NP$, l'équation $M^2 = A_2$ devient donc $N^2 = P^{-1}A_2P$, dont la solution est $N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b sont des éléments quelconques de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ vérifiant $a^2 = 1 = 1^2$ et $b^2 = 4 = 2^2$. Nous obtenons ainsi quatre solutions :

$$M_1 = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ M_2 = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

44) Soit A une solution du problème. Le polynôme $P = 4X^3 + 2X^2 + X$ est scindé (sur $\mathbb{C}$) à racines simples (ses racines sont 0, $\mu = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{4}$ et $\overline{\mu}$). A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{0, \mu, \overline{\mu}\}$ tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comme les valeurs propres de A sont toutes de modules strictement inférieur à 1 ($|\mu| = 1/2$), on en déduit que A^k tend vers 0 quand k tend vers l'infini, ce qui impose que (A^k) stationne à la valeur 0 (A^k est à valeurs entières) : A est donc nilpotente. On en déduit que le polynôme minimal Π_A de A divise P et X^n, donc $\Pi_A = X$ et $A = 0$.

Réciproquement, la matrice nulle est solution du problème.

45) On peut écrire $\chi_f = XP(X)$ avec $k = 1$ et $P = a + XQ \neq 0$. Comme P et X sont premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux donne $E = \text{Ker}\,(f) \oplus \text{Ker}\,(P(f))$. On peut ensuite écrire $P = a + XQ$ avec $a = P(0) \neq 0$, et si $x \in \text{Ker}\,(P(f))$, on a :

$$x = -\frac{1}{a}\,(XQ)(f)(x) = f\left(-\frac{1}{a}Q(f)(x)\right) \in \text{Im}\,(f)\,.$$

On en déduit que $\text{Ker}\,(P(f)) \subset \text{Im}\,(f)$. Comme ces deux espaces ont même dimension, ils sont égaux et $\text{Im}\,(f)$ et $\text{Ker}\,(f)$ sont supplémentaires.

46) a) Supposons que A et B n'ont pas de valeurs propres communes et soit $M \in \text{Ker}(\varphi_{A,B})$. On a donc $AM = MB$ et on en déduit facilement que pour tout polynôme P, $P(A)M = MP(B)$. En choisissant $P = \chi_B$, nous avons $P(A)M = 0$, donc $M = 0$ car $P(A)$ est inversible (aucune valeur propre de A n'est racine de P). $\varphi_{A,B}$ est donc un endomorphisme injectif : c'est un isomorphisme car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

Supposons que λ soit une valeur propre commune à A et B et fixons $X, Y \in \mathbb{C}^n$ non nuls tels que $AX = \lambda X$ et $B^\top Y = \lambda Y$ (λ est également valeur propre de $B^\top$). Nous avons donc :

$$AXY^\top - XY^\top B = \lambda XY^\top - X(\lambda Y)^\top = 0$$

donc $XY^\top$ est un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_{A,B})$ et $\varphi_{A,B}$ n'est pas un isomorphisme.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est une valeur propre de $\varphi_{A,B}$ si et seulement si $\varphi_{A,B} - \lambda \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ n'est pas injective. Comme $\varphi_{A,B} - \lambda \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = \varphi_{A-\lambda I_n, B}$, on déduit du a) que λ est valeur propre de $\varphi_{A,B}$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ et B ont une valeur propre commune, soit :

$$\text{Sp}(\varphi_{A,B}) = \{\alpha - \beta,\ \alpha \in \text{Sp}(A), \beta \in \text{Sp}(B)\}.$$

47) a) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution, alors $n \geq 3$ (car π_M divise χ_M qui est de degré n).

Réciproquement, supposons que $n \geq 3$. Le polynôme $P = X^3 + 2X + 2$ possède une unique racine réelle simple α (P' est strictement positif sur $\mathbb{R}$). La matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $\pi_A = \chi_A = P$ et en posant $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha I_{n-3} \end{pmatrix}$, on a bien $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\pi_M = \pi_A \vee \pi_{\alpha I_{n-3}} = P$.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que $\pi_M = X^3 + 2X + 2 = P$. La différence avec le cas réel est que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En effet, si α s'écrivait $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, on aurait : $p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$; ainsi, p diviserait $2q^3$, donc 2 puisque $p \wedge q = 1$ (lemme de Gauss) ; de même, q diviserait p^3, donc 1. Ainsi, on aurait $\alpha \in \{-2, -1, 1, 2\}$, ce qui est absurde car ces 4 valeurs n'annulent pas P.

En notant β et $\overline{\beta}$ les racines non réelles de P, il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\chi_M = (X - \alpha)^a (X - \beta)^b (X - \overline{\beta})^b$$

puisque χ_M étant réel, les racines non réeles conjuguées ont même ordre de multiplicité.

- Si $a > b$, on a $\chi_M = (X - \alpha)^{a-b} P^b$. Comme P et χ_M sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $(X - \alpha)^{a-b}$ est également à coefficient dans $\mathbb{Q}$, ce qui est absurde car son coefficient des degré $a - b - 1$ vaut $(b - a)\alpha$, qui n'est pas rationnel.

- Si $a < b$, on a $\chi_M = Q^{b-a} P^a$ avec $Q = (X - \beta)(X - \overline{\beta})$. Une nouvelle fois, χ_M et P sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$, donc Q^{b-a} est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. En notant $Q = X^2 + uX + v$, nous avons

  $$X^3 + 2X + 2 = (X^2 + uX + v)(X - \lambda) = X^3 + (u - \lambda)X^2 + (v - \lambda u)X - \lambda v,$$

  donc $u = \lambda \notin \mathbb{Q}$. Le coefficient de Q^{b-a} de degré $2(b - a) - 1$ est égal à $(b - a)u$ qui est irrationnel : c'est absurde.

Nous avons donc démontré par l'absurde que $a = b$, ce qui prouve que n est un multiple (non nul) de 3.

Réciproquement, si $n = 3a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$$

admet P pour polynôme minimal.

Remarque : nous avons utilisé quelques propriétés classiques :

a) si $A \in \mathcal{M}_p(K)$, $B \in \mathcal{M}_q(K)$ et si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $\pi_M = \pi_A \vee \pi_B$;

b) si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ avec $n \geq 1$, la matrice compagnon associée à P :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

admet P pour polynôme caractéristique et minimal.

Pour le a), il suffit de remarquer que pour $P \in K[X]$, on a $P(M) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$ et $P(B) = 0$. L'idéal annulateur de M est donc l'intersection des idéaux annulateurs de A et de B : son générateur est le p.p.c.m. des générateurs, soit $\pi_M = \pi_A \vee \pi_B$.

Pour le b), on peut vérifier que $\chi_M = P$ (par exemple en développant χ_M par rapport à sa dernière colonne, ou en faisant une récurrence et en développant par rapport à la première ligne). En regardant les premières colonnes des matrices A^0, A^1, ... , A^{n-1}, on montre que $(A^0, A^1, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre : cela prouve que $\pi - A$ est de degré au moins n. Comme il divise χ_M qui est de degré n, on a $\pi_M = \chi_M$.

48) a) Notons Φ cette application. Si $I \in \mathcal{I}$, on montre facilement que $F = \Phi(I)$ est élément de $\mathcal{S}$:

- $0 \in I$ donc $0 = 0(u)(x) \in F$;
- si $y, z \in F$ et $\alpha, \beta \in K$, il existe $P, Q \in I$ tels que $y = P(u)(x)$ et $z = Q(u)(x)$, d'où

$$\alpha y + \beta z = (\alpha P + \beta Q)(u)(x) \in F$$

  car I est un idéal ($\alpha P \in I$ car $\alpha \in K[X]$ et $P \in I$, puis $\alpha P + \beta Q \in I$ car I est stable par somme).
- si $y \in F$, il existe $P \in I$ tel que $y = P(u)(x)$. On a alors :

$$u(y) = (XP)(u)(x) \in F$$

  car $XP \in I$.

Montrons que Φ est injective : soient $I, J \in \mathcal{I}$ tels que $\Phi(I) = \Phi(J) = F$. Pour $P \in I$, on a $P(u)(x) \in F$, donc il existe $Q \in J$ tel que $P(u)(x) = Q(u)(x)$. On en déduit : $(P - Q)(u)(x) = 0$. Comme $(P - Q)(u)$ commute avec u, on a ensuite :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ (P - Q)(u)(u^i(x)) = u^i(0) = 0$$

En particulier, $(P-Q)(u)$ est nul sur la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, donc $(P-Q)(u) = 0$. On en déduit que $\pi \mid P-Q$. Comme $\pi \in J$, $P-Q$ est également élément de J, puis $P = P-Q+Q \in J$. Nous avons donc démontré que $I \subset J$, d'où $I = J$ par symétrie.

Montrons que Φ est surjective : soit F un sous-espace stable par u. Notons $I = \{P \in K[X],\ P(u)(x) \in F\}$. I est élément de $\mathcal{I}$:

- $0 \in I$ car $0(u)(x) = 0 \in F$;
- si $P, Q \in I$, $(P+Q)(u)(x) = \underbrace{P(u)(x)}_{\in F} + \underbrace{Q(u)(x)}_{\in F} \in F$: $P+Q \in I$;
- si $P \in K[X]$ et $Q \in I$, $(PQ)(u)(x) = P(u)(\underbrace{Q(u)(x)}_{\in F}) \in F$ car F est stable par u : $PQ \in \mathcal{I}$;
- $\pi(u)(x) = 0 \in F$ donc $\pi \in I$.

Par définition de I, on a $\Phi(I) \subset F$. Réciproquement, si $y \in F$, il existe $P \in K_{[n-1]}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$ (la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E). On a $P \in I$ et $y \in \Phi(I)$: on en déduit que $\Phi(I) = F$ et Φ est surjective.

$\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ ont donc même cardinal : comme les idéaux de $K[X]$ contenant π sont les idéaux de la forme $PK[X]$ avec P diviseur normalisé de π, ces deux ensembles sont finis.

b) Pour $y \in E$, on définit $F_y = \mathrm{Vect}\{u^i(y),\ i \in \mathbb{N}\}$: F_y est le plus petit sous-espace stable par u contenant y. Comme $\mathcal{S}$ est fini, on peut choisir $y_1, \dots, y_p$ tels que

$$E = \bigcup_{y \in E} F_y = \bigcup_{i=1}^{p} F_{y_i}$$

D'après le résultat admis, il existe i tel que $E = F_{y_i}$. Notons $x = y_i$. Il est alors classique que

$$F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$$

où k est le plus petit entier tel que $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est lié. On a en effet $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)) \subset F_x$ et si $i \in \mathbb{N}$, la relation de liaison entre x, $u(x)$, ..., $u^k(x)$ donne un polynôme non nul P de degré k tel $P(x) = 0$. En divisant X^i par P, on obtient $P = X^i Q + R$ avec $\deg(R) < k$, puis

$$u^i(x) = u^i(Q(u)(x)) + R(u)(x) = R(u)(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)).$$

Comme $F_x = E$, on a $k = n$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

c) Supposons par l'absurde que $F_i \neq E$ pour tout i : on peut alors choisir

$$(x_1, \dots, x_p) \in (E \setminus F_1) \times \dots (E \setminus F_p)$$

et considérer l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & K & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1} x_i \end{array}$$

Comme K est infini et f à valeur dans $F_1 \cup \dots \cup F_p$, il existe un indice m tel que $\{\lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda) \in F_m\}$ est infini. On peut alors choisir p scalaires distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$y_1 = f(\lambda_1), \dots, y_p = f(\lambda_p)$$

soient tous éléments de F_m. Nous pouvons voir ces égalités comme un système de Cramer (les λ_i sont deux à deux distincts : le déterminant de Vandermond est non nul) d'inconnues $x_1, \dots, x_p$, ce qui permet d'écrire chaque x_i comme combinaison linéaire des vecteurs $y_1, \dots, y_p$. On a alors une absurdité :

$$x_m \notin F_m \text{ et } x_m \in \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k) \subset F_m.$$

Autre preuve : supposons le résultat faux et soit p minimal tel qu'il existe $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ sous-espaces stricts de E dont la réunion est égale à E. On a en particulier $s \geq 2$ et $F_1 \not\subset F_2 \cup \cdots \cup F_p$ et $F_p \not\subset F_1 \cup \cdots \cup F_{p-1}$ (par minimalité de s). On peut donc choisir $x \in F_1 \setminus (F_2 \cup \cdots \cup F_p)$ et $y \in F_p \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{p-1})$. x et y sont distincts : on peut donc considérer la droite affine $D = (x, y)$. Pour tout i, D n'est pas contenue dans F_i ($x \notin F_i$ ou $y \notin F_i$). On en déduit que $D \cap F_i$ est de cardinal 0 ou 1 (si a et b sont deux points distincts de F_i, la droite affine (a, b) est contenue dans F_i), puis $\mathrm{Card}(D) \leq p$: c'est absurde car $\mathrm{Card}(D) = \mathrm{Card}(K) = +\infty$ (l'application $\lambda \longmapsto x + \lambda(y - x)$ est une bijection de K sur D).

49) a) Nous avons $M_1 = (1)$, donc $\chi_{M_1}(X) = X - 1$. Pour $n \geq 2$, nous avons :

$$\chi_{M_n}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ -1 & \dots & \dots & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^n + (-1)^n \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & X-1 \\ -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \end{vmatrix}}_{=D_{n-1}}$$

en développant le déterminant par rapport à sa première ligne. En retranchant la seconde colonne à la première colonne dans D_{n-1}, nous obtenons :

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -X & X-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & X-1 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \end{vmatrix} = -XD_{n-2}$$

Comme $D_1 = -1$, nous obtenons $D_{n-1} = (-X)^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, ce qui donne $\chi_{M_n}(X) = (X-1)^n - X^{n-2}$.

b) M_1 possède 1 pour seule valeur propre : la propriété est vérifiée pour $n = 1$. Quand $n = 2$, on a $\chi_{M_n}(X) = (X-1)^n - X^{n-2}$. On en déduit donc, pour $x > 1$:

$$\chi_{M_n}(x) = 0 \iff n \ln(x-1) - (n-2)\ln x = 0.$$

En posant $f_n : x \longmapsto n\ln(x-1) - (n-2)\ln x$, nous avons :

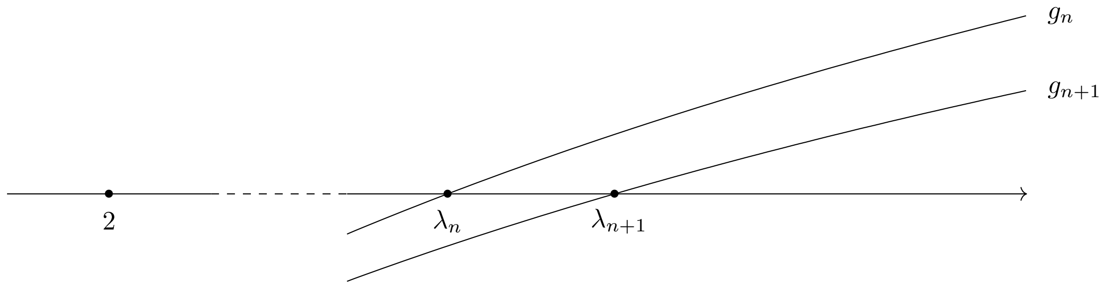
- $f_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$;
- $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$;
- f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1,\ f_n(x) = \dfrac{n + 2(x-1)}{(x-1)x} > 0$.

f réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$: il existe un unique $\lambda_n > 1$ tel que $f_n(\lambda_n) = 0$. Comme $\chi_{M_n}(1) = -1 \neq 0$, nous avons démontré que M_n possédait une et une seule valeur propre $\lambda_n \in [1, +\infty[$.

c) Pour $n \geq 3$, λ_n est la racine de l'application $g_n : x \longmapsto \dfrac{n}{n-2}\ln(x-1) - \ln x$. Comme g_n est croissante, on a :

$$\forall x > 1,\ x \geq \lambda_n \iff g_n(x) \geq 0.$$

D'autre part, $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ pour tout $x \geq 2$, car $\dfrac{n}{n-2} \geq \dfrac{n+1}{n-1}$ et $\ln(x-1) \geq 0$. Nous allons ainsi pouvoir montrer que (λ_n) est croissante, à condition de commencer par montrer que $\lambda_n \geq 2$:



Montrons que $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq 2$ pour tout $n \geq 3$, par récurrence sur n.

- $g_3(2) = -\ln 2 < 0$ donc $\lambda_3 \geq 2$;
- $g_4(\lambda_3) \leq g_3(\lambda_3) = 0$, donc $\lambda_4 \geq \lambda_3 \geq 2$.

Si $n \geq 3$ et si $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq 2$, on a comme ci-dessus $g_{n+2}(\lambda_{n+1}) \geq g_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0$, donc $\lambda_{n+2} \geq \lambda_{n+1} \geq 2$.

La suite $(\lambda_n)_{n\geq 3}$ est donc croissante. Si elle avait une limite finie λ quand n tend vers l'infini, on aurait l'absurdité $\ln(\lambda-1) - \ln(\lambda) = 0$ en faisant tendre n vers l'infini dans la relation $g_n(\lambda_n) = 0$. On en déduit que λ_n diverge vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. On a ensuite : $(n-2)\ln\lambda_n = n\ln(\lambda_n - 1) = n\ln\lambda_n + n\ln\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$, soit

$$n\ln\left(1-\frac{1}{\lambda_n}\right) = -2\ln\lambda_n$$

Comme λ_n tend vers l'infini, on en déduit l'équivalent :

$$\frac{n}{\lambda_n} \underset{+\infty}{\sim} 2\ln\lambda_n \qquad (1)$$

Nous allons (avec précaution) pendre le ln de cet équivalent : en écrivant $n = 2\lambda_n \ln\lambda_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, nous avons :

$$\ln n = \ln 2 + \ln\lambda_n + \ln\ln\lambda_n + \ln(1+\varepsilon_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln\lambda_n.$$

On revient enfin à la relation (1) pour obtenir :

$$\lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2\ln\lambda_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2\ln n}.$$

50) En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n racines (non nécessairement distinctes) de χ_A, nous avons :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \operatorname{Tr}(A^m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m$$

On en déduit le sens direct de l'équivalence demandée.

Supposons réciproquement que $\operatorname{Tr}(A^m) = \operatorname{Tr}(B^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Notons E la réunion des spectres de A et de B. Nous pouvons donc écrire $E = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ où les λ_i sont deux à deux distincts et noter, pour tout i, p_i (resp. q_i) l'ordre de multiplicité de λ_i comme racine de χ_A (resp. de χ_B). Nous avons donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{m} p_i\lambda_i^k = \operatorname{Tr}(A^m) = \operatorname{Tr}(B^m) = \sum_{i=1}^{m} q_i\lambda_i^k.$$

ce qui donne :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \sum_{i=1}^{m}(p_i - q_i)\lambda_i^k = 0$$

Comme les λ_i sont distincts deux à deux, on peut voir ces équations comme un système linéaire homogène d'inconnues $p_i - q_i$ dont le déterminant (Vandermonde) est non nul. On en déduit que $p_i = q_i$ pour tout i, ce qui traduit que χ_A et χ_B ont les mêmes racines associées aux mêmes ordres de multiplicité ; comme les polynômes sont normalisés, ils sont égaux.

51) a) Soit $P \in GL_n(K)$ tel que $P^{-1}AP = B$. Comme A est inversible, on a $\mathrm{Com}(A) = \det(A)\,{}^tA^{-1}$; de même, B est inversible et $\mathrm{Com}(B) = \det(B)\,{}^tB^{-1} = \det(A)\,{}^t(P^{-1}\,A\,P)-1 = Q\,\mathrm{Com}(A)\,Q^{-1}$, avec $Q = {}^tP$.

Les deux comatrices sont donc semblables.

b) Nous venons de démontrer :

$$\forall A \in GL_n(K),\ \forall P \in GL_n(K),\ \mathrm{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP\mathrm{Com}(A)^tP^{-1}.$$

Pour A quelconque et $P \in GL_n(K)$, nous avons donc :

$$\forall \lambda \in K \setminus \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Com}(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = {}^tP\mathrm{Com}(A - \lambda I_n)^tP^{-1}.$$

Les coordonnées des matrices $\mathrm{Com}(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)$ et ${}^tP\mathrm{Com}(A - \lambda I_n)^tP^{-1}$ sont des polynômes en λ, qui coïncident pour infinité de valeurs de λ (le corps K est infini et le spectre de A est fini). On en déduit que ces polynômes sont égaux sur tout K, et en particulier en 0. Ainsi :

$$\forall A \in M_n(K),\ \forall P \in GL_n(K),\ \mathrm{Com}(P^{-1}AP) = {}^tP\mathrm{Com}(A)^tP^{-1}.$$

c) Comme χ_A est scindé, A est semblable à une matrice B triangulaire supérieure, de diagonale égale à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On montre alors très facilement que la comatrice de B est triangulaire inférieure, de diagonale égale à $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ où $\mu_k = \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}\lambda_{k+1} \ldots \lambda_n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Nous avons donc :

$$\chi_{\mathrm{Com}(A)} = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \prod_{i \neq k} \lambda_i \right).$$

52) Première méthode

a) On suppose ici que E est de dimension au moins égale à 2 (on initialisera la récurrence avec E de dimension 1). Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, u est trigonalisable : les $n-1$ premiers vecteurs d'une base qui trigonalise u engendrent un hyperplan stable (on peut aussi fixer une valeur propre λ : comme $\mathrm{Im}(u - \lambda Id)$ est différent de E, il est contenu dans un hyperplan H et cet hyperplan est stable par u).

b) Rédigeons correctement la preuve par récurrence. Si E est une droite vectorielle, tout vecteur non nul x de E vérifie $\pi_{u,x} = \pi_u$. Soit maintenant $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée en dimension $n-1$. D'après le a), il existe un hyperplan H stable par u et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à v : il existe $x \in H$ tel que $\pi_v = \pi_{v,x} = \pi_{u,x}$. Fixons ensuite $y \in E \setminus H$. Pour $z \in E$, $\pi_{u,z}$ est un diviseur de π_u (car $\pi_u \in I_z$) . Comme π_u possède un nombre fini de diviseurs normalisés, l'application $\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \pi_{u,x+\lambda y}$ n'est pas injective. Il existe donc λ et μ complexes distincts tels que $\pi_{u,x+\lambda y} = \pi_{u,x+\mu y}$. Notons P ce polynôme. Nous avons $P(u)(x + \lambda y) = P(u)(x + \mu y) = 0$, donc $P(u)(x) + \lambda P(u)(y) = P(u)(x) + \mu P(u)(y) = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $P(u)(x) = P(u)(y) = 0$. On a donc $P \in I_x$, donc $\pi_v = \pi_{v,x} \mid P$, ce qui donne $P(u)(h) = 0$ pour tout $h \in H$. Enfin, $P(u)$ est nul sur H et en y : il est nul sur $E = H \oplus \mathbb{C}y$.

Ceci prouve que P est un multiple de π_u, puis que $P = \pi_u$ car $P = \pi_{u,x+\lambda y}$ divise π_u. Il existe donc un vecteur $x' \in E$ tel que $\pi_{u,x'} = \pi_u$.

Seconde méthode

a) F_i est stable par u et $(u - \lambda_i Id)_{|F_i}$ est nilpotent d'indice m_i. Il existe donc $x_i \in F_i$ tel que $(u - \lambda_i)^{m_i - 1}(x_i) \neq 0$. Ceci traduit que $\pi_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{m_i}$.

b) Posons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i$. On a $0 = \pi_{u,x}(u)(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\pi_{u,x}(u)(x_i)}_{\in F_i}$ donc $\pi_{u,x}(u)(x_i) = 0$ pour tout i. On en déduit que $\pi_{u,x_i} \mid \pi_{u,x}$ pour tout i, et donc :

$$\pi_{u,x} \mid \pi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} = \bigvee_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i} = \bigvee_{i=1}^{k} \pi_{u,x_i} \mid \pi_{u,x}$$

On en déduit que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

53) a) Comme AB est inversible, A est surjective et B est injective. On en déduit que A est de rang n (dimension de l'espace d'arrivée) et la formule du rang donne $\text{rg}(B) = n - \dim(\text{Ker}\, B) = n$.

On en déduit, toujours avec la formule du rang :

$$\dim(\text{Ker}\, A) + \dim(\text{Im}\, B) = p - n + n = \dim(K^p)$$

D'autre part, si $X \in \text{Ker}\, A \cap \text{Im}\, B$, on peut écrire $X = BY$ avec $Y \in \mathbb{K}^p$, ce qui donne $0 = AX = ABY$, d'où $Y = 0$ (car AB est inversible), puis $X = 0$.

Les espaces $\text{Ker}\, A$ et $\text{Im}\, B$ sont ainsi supplémentaires.

Il est ensuite classique que la restriction de $X \longmapsto AX$ à $\text{Im}\, B$ est un isomorphisme de $\text{Im}\, B$ sur $\text{Im}\, A = K^n$.

b) Comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de K^n, l'isomorphisme précédent permet de construire une base $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\text{Im}\, B$ telle que $A\varepsilon_i = e_i$ pour tout i. On a ensuite, pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$ABA\varepsilon_i = ABe_i = \lambda_i e_i = A(\lambda_i \varepsilon_i)$$

en notant λ_i la valeur propre associée à e_i. On en déduit que $BA\varepsilon_i - \lambda_i \varepsilon_i$ est un élément de $\text{Ker}\, A$. Comme ce vecteur est également dans $\text{Im}\, B$, il est nul : ε_i est un vecteur propre pour BA, associé à λ_i.

Comme BA est nulle sur $\text{Ker}\, A$, on obtient une base qui diagonalise BA en complétant la base $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\text{Im}\, B$ avec une base de $\text{Ker}\, A$.

54) a) On peut remarquer que $M(t)$ est symétrique réelle : elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral. On peut aussi montrer que $P_t(X) = \chi_{M(t)}(X) = X^3 - (t+2)X^2 + (2t-1)X + 1$ est scindé simple, puisque $P_t(0) = 1 > 0$, $P_t(2) = -1 < 0$ avec $P_t(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P_t(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$: $M(t)$ a donc trois valeurs réelles, avec $\alpha(t) < 0 < \beta(t) < 2 < \gamma(t)$.

b) et c) On a directement :

```
import numpy as np

def M(t):
    Mat = np.zeros((3,3))
    for i in range(3):
        for j in range(3-i):
            Mat[i][j] = 1
    Mat[-1][-1]=t
    return Mat

def chi(t,x):
    return(np.linalg.det(x*np.identity(3)-M(t)))

def valeurs_propres(M):
    T=np.linalg.eigvals(M)
    T.sort()
    return(T)

import matplotlib.pyplot as plt

alpha, beta, gamma, T = [], [], [], []
t1, t2, N = -10, 10, 100  # intervalle d'etude et nombre de subdivisions

for i in range(N):
    t = t1+i/N*(t2-t1)
    a,b,c = valeurs_propres(M(t))
    alpha.append(a)
    beta.append(b)
```

```
    gamma.append(c)
    T.append(t)

plt.plot(T, alpha, color='red')
plt.plot(T, beta, color='blue')
plt.plot(T, gamma, color='green')
plt.show()
```

Les fonctions α, β et γ semblent être strictement croissantes, avec :

$$\begin{cases} \alpha_t =_{-\infty} t + o(1) \\ \alpha(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0^- \\ \beta_t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0^+ \\ \beta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2^- \\ \gamma(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2^+ \\ \gamma_t =_{+\infty} t + o(1) \end{cases}$$

d) Fixons $\varepsilon \in]0,1[$; nous avons :

$$P_t(-\varepsilon) = -t\underbrace{\varepsilon(2-\varepsilon)}_{>0} + 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

donc il existe $t_1 > 3$ tel que $P_t(-\varepsilon) < 0$ pour tout $t \geq t_1$. De même,

$$P_t(\varepsilon) = t\underbrace{\varepsilon(2-\varepsilon)}_{>0} + 1 - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

donc il existe $t_2 > 3$ tel que $P_t(\varepsilon) > 0$ pour tout $t \geq t_2$. On montre de la même manière qu'il existe $t_3, t_4, t_5, t_6 \geq 3$ tels que :

$$\begin{cases} \forall t \geq t_3,\ P_t(2-\varepsilon) > 0 \\ \forall t \geq t_4,\ P_t(2+\varepsilon) < 0 \\ \forall t \geq t_5,\ P_t(t-\varepsilon) < 0 \\ \forall t \geq t_3,\ P_t(t+\varepsilon) > 0 \end{cases}$$

Pour $t \geq \max(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$, nous avons donc $P_t(-\varepsilon) < 0 < P_t(\varepsilon)$, $P_t(2-\varepsilon) > 0 > P_t(2+\varepsilon)$ et $P_t(t-\varepsilon) < 0 < P_t(t+\varepsilon)$. Comme $-\varepsilon < \varepsilon < 2-\varepsilon < 2+\varepsilon < t-\varepsilon < t+\varepsilon$, cela prouve que $-\varepsilon < \alpha(t) < \varepsilon$, $2-\varepsilon < \beta(t) < 2+\varepsilon$ et $t-\varepsilon < \gamma(t) < t+\varepsilon$ pour t suffisamment grand, i.e. que $\alpha(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $\beta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2$ et $\gamma(t) =_{+\infty} t + o(1)$.

On montre de façon symétrique que $\alpha(t) =_{-\infty} t + o(1)$, $\beta(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ et $\gamma(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 2$.

Soient deux réels s et t tels que $s < t$; pour comparer les racines de P_s et de P_t, il suffit de connaître le signe de $Q = P_s - P_t$. Un calcul élémentaire donne :

$$Q(X) = (t-s)X(X-2)$$

Ainsi, Q est strictement négatif sur $]0,2[$ et strictement positif sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. On en déduit que

$$\begin{cases} P_s(\alpha(t)) = Q(\alpha(t)) > 0 \quad \text{car } \alpha(t) < 0 \\ P_s(\beta(t)) = Q(\beta(t)) < 0 \quad \text{car } 0 < \beta(t) < 2 \\ P_s(\gamma(t)) = Q(\gamma(t)) > 0 \quad \text{car } 2 < \gamma(t) \end{cases}$$

En utilisant le tableau de signe de P_s :

x	$-\infty$		$\alpha(s)$		0		$\beta(s)$		2		$\gamma(s)$		$+\infty$
$P_s(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

nous obtenons $\alpha(s) < \alpha(t)$, $\beta(s) < \beta(t)$ et $\gamma(s) < \gamma(t)$: les trois fonctions sont bien strictement croissantes.

55) a) Soient λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(px+1-p) = \lambda f(x).$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, la suite définie par la récurrence $x_{n+1} = px_n + 1 - p$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = \lambda^n f(x_0).$$

Comme $x_n = 1 + p^n(x_0 - 1)$, x_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, ce qui prouve que λ^n tend vers $\dfrac{f(1)}{f(x_0)}$: ceci impose $\lambda \in]-1,1]$. On peut aussi remarquer :

- si $\lambda \in]-1,1[$, $f(1) = 0$;
- si $\lambda = 1$, on aura $f(x_0) = f(1)$ pour tout x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ et f sera constante (et réciproquement, la fonction constante égale à 1 est bien vecteur propre associé à la valeur propre 1).

b) 0 n'est pas valeur propre de u car $u(f) = 0$ impose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(px+1-p) = 0$, soit $f = 0$.

c) On va maintenant utiliser que les fonctions manipulées sont de classe C^∞. Soit λ une valeur propre associée à un vecteur propre f. On a alors facilement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(f^{(k)}) = \frac{\lambda}{p^k} f^{(k)}.$$

Comme λ est non nul et $0 < p < 1$, $\dfrac{\lambda}{p^k} \notin]-1,1]$ pour k assez grand : on en déduit que $f^{(k)} = 0$ à partir d'un certain rang (sinon, $f^{(k)}$ serait un vecteur propre propre associée à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{p^k}$). En notant d le degré de f, nous avons alors $u(f^{(d)}) = \frac{\lambda}{p^d} f^{(d)}$: comme $f^{(d)}$ est une constante non nulle, ceci impose $\frac{\lambda}{p^d} = 1$. Ainsi, f est associé à la valeur propre p^d et comme $f(1) = f'(1) = \cdots = f^{(d-1)}(1) = 0$, f est colinéaire à la fonction $f_d :\ x \longmapsto (x-1)^d$.

Réciproquement, f_d est bien vecteur propre :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(f_d)(x) : (px+1-p-1)^d = p^d(x-1)^d = p^d f_p(x).$$

Les valeurs propres de f sont donc les p^d pour $d \in \mathbb{N}$, chaque espace propres étant de dimension 1.

56) a) On a facilement :

- I_x est non vide puisqu'il contient le polynôme minimal de f ;
- si $P, Q \in I_x$, $(P+Q)(f)(x) = P(f)(x) + Q(f)(x) = 0$ donc $P + Q \in I_x$;
- si $P \in I_x$ et $Q \in K[X]$, $(PQ)(f)(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = Q(f)(0) = 0$ donc $PQ \in I_x$

donc I_x est un idéal non réduit à $\{0\}$: il est donc engendré par un polynôme normalisé qui divise π_f (car $\pi_f \in I_x$).

La famille $\mathcal{L} = (x, f(x), \ldots, f^{d_x-1}(x))$ est libre (car $a_0 x + \cdots a_{d_x-1} f^{d_x-1}(x) = 0$ donne $a_0 + \cdots + a_{d_x-1} X^{d_x-1} \in I_x$, d'où $a_i = 0$ pour tout i). Le sous-espace E_x engendré par $\mathcal{L}$ est donc de dimension d_x, est stable par f (car $f_x^d(x)$ est élément de E_x, la relation $\pi_x(f)(x) = 0$ permettant de l'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$) et il est clairement contenu dans tout sous-espace vectoriel contenant x et stable par f.

b) Soit $z \in E_x \cap E_y$. En notant f_x la restriction de f à E_x, nous avons $\pi_{f,x} = \pi_{f_x,x}$ qui divise π_{f_x} : comme $\pi_{f,x}$ est de degré $d_x = \dim(E_x)$, nous en déduisons que $\pi_{f,x} = \pi_{f_x}$ (la dimension de π_{f_x} est inférieur ou égale à la dimension de E_x). Nous en déduisons que $\pi_{f,z} = \pi_{f_x,z}$ divise $\pi_{f,x}$. Symétriquement, $\pi_{f,z}$ divise $\pi_{f,y}$, ce qui donne $\pi_{f,z} = 1$, soit $z = 0$: E_x et E_y sont en somme directe.

On a ensuite :

$$\forall P \in K[X],\ P(f)(x+y) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{P(f)(x)}_{\in E_x} + \underbrace{P(f)(y)}_{\in E_x - y} = 0 \Longleftrightarrow P(f)(x) = P(f)(y) = 0$$

donc $I_{x+y} = I_x \cap I_y$, i.e. $\pi_{f,x+y} = \pi_{f,x} \vee \pi_{f,y} = \pi_{f,x}\,\pi_{f,y}$. E_{x+y} est donc de dimension $d_x + d_y$: comme E_{x+y} est inclu dans $E_x \oplus E_y$ et a même dimension, on a bien $E_x \oplus E_y = E_{x+y}$.

c) Considérons la décomposition de π_f est facteurs irréductibles : $\pi_f = \prod_{i=1}^k P_i^{m_i}$ avec $k \geq 1$, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_k$ polynômes irréductibles deux à deux distincts. D'après le lemme de décomposition des noyaux, nous avons :

$$E = \mathrm{Ker}\,(\pi_i(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}(P_i^{m_i}(f))}_{=F_i}$$

Chaque espace F_i est stable par f et, en notant f_i la restriction de f à F_i, nous avons $\pi_{f_i} = P_i^{m_i}$. Pour $x \in F_i$, $\pi_{f_i,x}$ étant un diviseur de π_{f_i}, il existe un entier m_x tel que $\pi_{f_i,x} = P_i^{m_x}$. On a alors facilement $m_i = \max\{m_x,\ x \in F_i\}$. Il existe ainsi pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ un élément $x_i \in F_i$ tel que $\pi_{f,x_i} = P_i^{m_i}$ et d'après le b), nous avons par une récurrence évidente que $x = x_1 + \cdots + x_k$ vérifie $\pi_{f,x} = \pi_f$.

Exercices X-ENS

57) Notons $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\chi_{A^k} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k) = X^n + \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} X^j.$$

Comme les λ_i sont de module inférieurs à 1, il existe une constante $M \in \mathbb{N}$ telle que $|a_{j,k}| \leq M$ pour tous $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$. La matrice A étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$, les coefficients de A^k sont des entiers : on en déduit que χ_{A^k} appartient à l'ensemble fini $\mathcal{P} = \{X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j,\ \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in [\![-M, M]\!]\}$. L'ensemble $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists P \in \mathcal{P},\ P(z) = 0\}$ est alors également fini. On peut ensuite conclure : si λ est une valeur propre de A, la suite $(\lambda^k)_{k \geq 0}$ est à valeurs dans l'ensemble fini $\mathcal{R}$, donc il existe k_1, k_2 tels que $0 \leq k_1 < k_2$ et $\lambda^{k_1} = \lambda^{k_2}$. Comme $\lambda \neq 0$ (A est inversible), $\lambda^{k_2 - k_1} = 0$: les valeurs propres de A sont des racines de l'unité.

58) a) Dans les deux cas, f est annulé par un polynôme scindé (sur $\mathbb{R}$) à racines simples ($X(X-1)$ ou $X(X-1)(X+1)$), donc f est diagonalisable.

b) Le polynôme $X^4 - X$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$: en prenant par exemple un endomorphisme f dont la matrice dans une base de E est égale à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; on obtient un endomorphisme dont le polynôme minimal est $\pi_f = (1 + X + X^2)X$ si $n \geq 3$ et $\pi_f = 1 + X + X^2$ si $n = 2$; f n'est pas diagonalisable (et même pas trigonalisable) et est annulé par le polynôme $X^4 - X = X(X-1)(X^2 + X + 1)$.

c) Si un endomorphisme f d'un espace E de dimension 3 est annulé par $X^4 - X$, on peut appliquer le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}\left(f^2 + f + Id\right).$$

Si f n'a pas de valeurs propres non réelles, $\mathrm{Ker}\,(()\, f^2 + f + Id) = \{0\}$ et f est diagonalisable. Dans une base bien choisie, la matrice de f aura l'une des formes ci-dessous :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si f a une valeur propre complexe non réelle (j ou j^2), elle admet également sa valeur conjuguée pour valeur propre ; la troisième valeur propre est réelle et égale à 0 ou à 1. Nous avons donc deux cas possibles :

- $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension 1, $\operatorname{Ker}(f - Id) = \{0\}$ et $\operatorname{Ker}\left(f^2 + f + Id\right)$ est de dimension 2 ;
- $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, $\operatorname{Ker}(f - Id)$ est de dimension 1 et $\operatorname{Ker}\left(f^2 + f + Id\right)$ est de dimension 2.

Dans les deux cas, nous pouvons choisir un vecteur propre e_1, puis un vecteur non nul $e_2 \in \operatorname{Ker}(() f^2 + f + Id)$. Le vecteur $e_3 = f(e_2)$ est alors un élément de $\operatorname{Ker}\left(f^2 + f + Id\right)$ indépendant de e_2 : la famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de E dans laquelle la matrice de f est de l'une des formes suivantes :

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $f(e_3)$ est de la forme $\alpha e_2 + \beta e_3$ et on calcule facilement α et β en remarquant par exemple que le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ est égal à $X^2 + X + 1$.

Les six éléments de $S = \{A_1, \ldots, A_6\}$ étant deux à deux non semblables, on obtient bien un ensemble S de cardinal minimal.

59) Preuve par contraposée du sens direct.

Supposons que le polynôme minimal π_f de f est différent de son polynôme caractéristique χ_f. Le degré d de π_f est donc strictement plus petit que n. Pour $x \in E$, le sous-espace vectoriel :

$$F_x = \operatorname{Vect}\left(\left\{f^k(x),\ k \in \mathbb{N}\right\}\right) = \operatorname{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{d-1}(x)\right\}\right)$$

est stable par f (c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f) et est de dimension au plus d. Nous allons construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que les F_{x_k} soient deux à deux distincts : ceci prouvera que f possède une infinité de sous-espaces stables. Nous utiliserons pour cela le résultat classique :

lemme : si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif infini K, une réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E n'est un sous-espace vectoriel que dans le cas trivial où l'un des sous-espaces contient tous les autres.

Supposons par l'absurde que $F_1, F_2, \ldots, F_k$ soient des sous-espaces vectoriels de E tels que :

- $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ est un sous-espace vectoriel ;
- pour tout i, F_i n'est pas égal à F.

On peut alors choisir

$$(x_1, \ldots, x_k) \in (F \setminus F_1) \times \ldots (F \setminus F_k)$$

et considérer l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ & \lambda & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda^i x_i \end{array}$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini et f à valeur dans $F_1 \cup \cdots \cup F_k$, il existe un indice m tel que $\{\lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda) \in F_m\}$ est infini. On peut alors choisir k scalaires distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$y_1 = f(\lambda_1), \ldots, y_k = f(\lambda_k)$$

soient tous éléments de F_m. Nous pouvons voir ces égalités comme un système de Cramer (les λ_i sont deux à deux distincts : le déterminant de Vandermond est non nul) d'inconnues $x_1, \ldots, x_k$, ce qui permet d'écrire chaque x_i comme combinaison linéaire des vecteurs $y_1, \ldots, y_k$. On a alors une absurdité :

$$x_m \notin F_m \text{ et } x_m \in \operatorname{Vect}(y_1, \ldots, y_k) \subset F_m.$$

Nous pouvons maintenant construire les x_i par récurrence.

- On choisit $x_0 = 0$ et F_{x_0} est un sous-espace stable par f.
- Soit $k \geq 0$ et supposons construits $x_0, \dots, x_k$ de sorte que les sous-espaces $F_{x_0}, \dots, F_{x_k}$ soient deux à deux distincts. La réunion de ces sous-espaces vectoriels ne peut être égale à E (sinon, l'un des F_{x_i} serait égal à E d'après le lemme, ce qui n'est pas le cas car $d < n$). On peut donc choisir x_{k+1} tel que
$$x_{k+1} \notin \bigcup_{i=0}^{k} F_{x_i}$$
et les sous-espaces $F_{x_0}, \dots, F_{x_{k+1}}$ sont bien deux à deux distincts.

Preuve du sens indirect

Supposons que $\chi_f = \pi_f$. Commençons par supposer que χ_f est scindé sur K :
$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}.$$
Nous pouvons alors décomposer E en somme directe des sous-espaces caractéristiques de f :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E)^{n_i}}_{=E_i}.$$
Si F est un sous-espace stable par f et si l'on note g l'endomorphisme de F induit par f, nous avons également :
$$F = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}(g - \lambda_i Id_F)^{n_i}}_{=F_i}$$
On peut donc écrire $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ où $F_i = F \cap E_i$ est un sous-espace de E_i stable par f.

Réciproquement, si on fixe une famille $(F_1, \dots, F_k)$ telle que pour tout i, F_i est un sous-espace de E_i stable par f, le sous-espace $F : \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ est stable par f.

Pour montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces stables par f, il suffit donc de montrer que la restriction de f à un des E_i ne possède qu'un nombre fini de sous-espaces stables. Autrement-dit, nous sommes ramenés au cas particulier où f ne possède qu'une valeur propre λ. On peut ensuite encore se ramener au cas où $\lambda = 0$, en remplaçant f par $f - \lambda Id$. Nous supposerons donc maintenant que f est nilpotent de polynôme minimal égal à son polynôme caractéristique. On a donc $f^{n-1} \neq 0$ et on peut choisir $e_n \in E$ tel que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$. En posant $e_{n-1} = f(e_n)$, $e_{n-2} = f(e_{n-1})$, …, $e_1 = f(e_2)$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ est une base de E et :
$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Nous allons montrer que les seuls sous-espaces stables par f sont les $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ces espaces sont effectivement clairement stables par f, et si F est un sous-espace stable par f, il existe k minimal tel que $F \subset F_k$. Si $k = 0$, $F = \{0\} = F_0$. Sinon, il existe $x \in F$ tel que $x \in F_k \setminus F_{k-1}$. La matrice M de la famille $\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x))$ dans la base $(e_1, \dots, e_k)$ de F_k est alors de la forme :
$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_k \\ \alpha_2 & \alpha_3 & & \iddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \alpha_k & \iddots & & \vdots \\ \alpha_k & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_k \neq 0$: M est donc inversible et $\mathcal{F}$ est une base de F_k. Comme les éléments de $\mathcal{F}$ appartiennent à F, on a prouvé que $F_k \subset F$, et donc $F = F_k$. Ceci achève la preuve du cas particulier où χ_f est scindé.

Si on ne suppose plus que χ_f est scindé, on peut considérer un sur-corps L de K sur lequel χ_f est scindé ($L = \mathbb{C}$ si K est, comme dans le programme officiel, un sous-corps de $\mathbb{C}$ ... ou un corps de décomposition de χ_f si on n'a pas peur de manipuler les anneaux quotients). On travaille donc matriciellement : on note $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matrice de f dans une base quelconque de E et on considère A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(L)$. Comme $\chi_A = \pi_A$ (ces polynômes sont les mêmes que l'on considère A comme matrice à coefficients dans K ou dans L), il existe un nombre fini de L-sous-espaces de L^n stables par A.

Si $F = \mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_k)$ est un K-sous-espace de K^n stable par A, le sous-espace $\overline{F} = \mathrm{Vect}_L(e_1, \ldots, e_k)$ est un L-sous-espace de L^n stable par A. Comme $F = K^n \cap \overline{F}$, on en déduit que l'application $F \longmapsto \overline{F}$ est injective de l'ensemble des K-sous-espaces de K^n stables par A dans l'ensemble des L-sous-espaces de L^n stables par A : ceci prouve qu'il n'y a qu'un nombre fini de K-sous-espaces de K^n stables par A, et donc qu'un nombre fini de sous-espaces de E stables par f.

60) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, notons $K[u]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par les puissances de u :

$$K[u] = \mathrm{Vect}\left(u^k,\ k \in \mathbb{N}\right) = \{Q(u),\ Q \in K[X]\}.$$

est l'algèbre engendrée par u (c'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u).

On montre facilement qu'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(u) = 0$ si et seulement si $K[u]$ est de dimension finie :

- si P existe et si $Q(u)$ est un élément quelconque de $K[u]$, on a $Q(u) = R(u)$ où R est le reste dans la division euclidienne de Q par P : ceci prouve que $K[u] = \mathrm{Vect}\left(u^k,\ 0 \leq k < \deg(P)\right)$ est de dimension finie au plus égale au degré de P ;

- réciproquement, si $K[u]$ est de dimension d, la famille $(Id, u, \ldots, u^d)$ est liée, donc il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in K^{d+1}$ non nul tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k = 0$: le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ est non nul et $P(u) = 0$.

Ainsi, s'il existe $P \in K[X]$ non nul tel que $P(u) = 0$, $K[u]$ est de dimension finie ; pour Q polynôme quelconque, on a $K[Q(u)] \subset K[u]$ et donc $K[Q(u)]$ est également de dimension finie : il existe $R \in K[X]$ non nul tel que $R(Q(u)) = 0$.

61) Les coefficients de la matrice $M(\lambda) = (A - \lambda B)^n$ sont des polynômes en λ de degré au plus n qui admettent les $n+1$ complexes λ_i pour racines distinctes : on en déduit que $M(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. On a en particulier $A^n = 0$ et A est nilpotente. D'autre part, on peut écrire :

$$M(\lambda) = N(\lambda) + (-1)^n \lambda^n B^n$$

avec $N(\lambda)$ matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $n - 1$: on en déduit que $B^n = 0$ et B est également nilpotente.

62) Notons $\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de A. Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \lambda_i^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!],\ \sum_{i=1}^{k} n_i\, \lambda_i^{j+m} = \mathrm{Tr}(A^{m+j})$$

ce qui peut se voir comme un système $BX_m = Y_m$, en posant

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix},\ X_m = \begin{pmatrix} n_1\, \lambda_1^m \\ n_2\, \lambda_2^m \\ \vdots \\ n_k\, \lambda_k^m \end{pmatrix} \text{ et } Y_m = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(A^m) \\ \mathrm{Tr}(A^{m+1}) \\ \vdots \\ \mathrm{Tr}(A^{m+k-1}) \end{pmatrix}$$

La matrice B est inversible (matrice de Vandermonde associée à k complexes deux à deux distincts) : on peut donc écrire

$$X_m = B^{-1}Y_m.$$

Comme Y^m tend vers 0 quand m tend vers l'infini, X^m tend également vers le vecteur nul, ce qui signifie que $|\lambda_i| < 1$ pour tout i.

63) Comme M est nilpotente et non nulle (car $NM + MN \neq 0$), on a $M^2 = 0$ et $M \neq 0$. Ainsi, M est de rang 1 et son noyau est de dimension 1. Soit e_1 une base de ce noyau. On a alors :

$$e_1 = (NM + MN)e_1 = M(Ne_1)$$

donc $e_2 = Ne_1$ est non nul (sinon, e_1 serait nul). On en déduit que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (car e_2 est une base de $\mathrm{Ker}(N)$ (N est également nilpotente d'indice 2) et $e_1 \notin \mathrm{Ker}(N)$). On a donc :

$$\begin{cases} Me_1 = 0 \\ Me_2 = MNe_1 = e_1 - NMe_1 = e_1 \\ Ne_1 = e_2 \\ Ne_2 = N^2e_1 = 0 \end{cases}$$

En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (e_1, e_2), nous avons donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

64) La matrice A est annulée par le polynôme $X^2 + 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: A est donc diagonalisables sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-i, i\}$. Comme A a au moins une valeur propre complexe et que ses valeurs propres non réelles sont deux à deux conjuguées, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$, $-i$ et i étant de même ordre de multiplicité $k = n/2$. On peut choisir une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de l'espace propre (complexe) pour la valeur propre i et la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, \overline{e_1}, e_2, \overline{e_2}, \ldots, e_k, \overline{e_k})$$

est une base de $\mathbb{C}^n$ qui diagonalise A. La famille

$$\mathcal{B}' = (Re(e_1), Im(e_1), Re(e_2), Im(e_2), \ldots, Re(e_k), Im(e_k))$$

est alors une base de $\mathbb{C}^n$, car la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} Q & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q \end{pmatrix} \text{avec } Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & +i \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).$$

Comme les vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont éléments de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}'$ est également une base de $\mathbb{R}^n$ et on a, pour tout k :

$$A(Re(e_k)) + iA(Im(e_k)) = A(e_k) = ie_k = -Im(e_k) + iRe(e_k)$$

et donc

$$A(Re(e_k)) = -Im(e_k) \text{ et } A(Im(e_k)) = Re(e_k)$$

On en déduit que A est semblable (sur $\mathbb{R}$) à la matrice :

$$A_0 = \begin{pmatrix} B & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B \end{pmatrix} \text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, toute matrice A semblable à A_0 vérifie $A^2 = -I_n$.

65) a) On a, en effectuant les opérations élémentaires $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_{i+n}$ pour i variant de 1 à n :

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2 I_n - A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det(\lambda^2 I_n - A) = \chi_A(\lambda^2).$$

Les valeurs propres de M sont donc les racines carrées des valeurs propres de A. Plus précisément, en notant

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{k} (X - \mu_i)^{n_i}$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_1, \ldots, \mu_k$ distincts deux à deux et en choisissant pour chaque i une racine carrée λ_i de μ_i :

$$\chi_M = \prod_{j=1}^{k} (X^2 - \lambda_i^2)^{n_i} = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i} (X + \lambda_i)^{n_i}.$$

Si λ est une valeur propre de M, on a :

$$M \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} AX_2 = \lambda X_1 \\ X_1 = \lambda X_2 \end{Bmatrix} \iff \begin{cases} AX_2 = \lambda^2 X_2 \\ X_1 = \lambda X_2 \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2n})$ a même dimension que $\mathrm{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$, puisque l'application $X_2 \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$ sur $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2n})$.

Si A est inversible, M possède $2k$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, -\lambda_1, \ldots, \lambda_k, -\lambda_k$, d'ordres respectifs $n_1, n_1, \ldots, n_k, n_k$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
M \text{ est diagonalisable} \quad &\iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ \dim\left(\mathrm{Ker}(M - \lambda_i I_{2n})\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(M + \lambda_i I_{2n})\right) = n_i \\
&\iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\},\ \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \mu_i I_n)\right) = n_i \\
&\iff \quad A \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

Si A n'est pas diagonalisable, on peut choisir $\mu_1 = 0$: 0 est valeur propre de A d'ordre n_1 et 0 est valeur propre de M d'ordre $2n_1$; comme $\mathrm{Ker}(M)$ est de dimension n_1, qui est strictement inférieur à $2n_1$, M n'est pas diagonalisable. Nous avons ainsi démontré que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

66) Supposons dans un premier temps que f est un isomorphisme. Comme f^m est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{k} (X - \mu_i)$ tel que $P(f^m) = 0$. On en déduit que le polynôme $Q = P(X^m) = \prod_{i=1}^{k} (X^m - \mu_i)$ est un polynôme annulateur de f. Comme les μ_i sont non nuls, Q est scindé à racines simples (chaque μ_i possède m racines m-ièmes distinctes et les racines m-ièmes de complexes distincts sont deux à deux distinctes). On en déduit que f est diagonalisable, dont f^{m+1} également.

Supposons maintenant que f n'est pas inversible. 0 est donc valeur propre de f et on peut écrire $\chi_f = X^k P(X)$ avec $k \geq 1$ et $P(0) \neq 0$. Le lemme de décomposition des noyaux s'applique (X^m et P sont premiers entre eux), ce qui donne :

$$E = F_1 \oplus F_2 \text{ avec } F_1 = \mathrm{Ker}(f^k) \text{ et } F_2 = \mathrm{Ker}(P(f)).$$

Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux deux sous-espaces stables F_1 et F_2. Par hypothèse, f_1^m et f_2^m sont diagonalisables :

- comme f_1 est nilpotent, f_1^m est nilpotent et diagonalisable, donc $f_1^m = 0$: on en déduit que f_1^{m+1} est nul, donc diagonalisable ;

- f_2 est un isomorphisme de F_2 et f_2^m est diagonalisable, donc la preuve précédente prouve que f_2^{m+1} est également diagonalisable.

Enfin, f^{m+1} est diagonalisable, puisque ses restrictions aux deux espaces supplémentaires F_1 et F_2 le sont.

67) Comme $M^n = I_2$, M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres λ_1, λ_2 sont des racines n-ièmes de l'unité. Si λ_1 est réelle, λ_2 l'est aussi et $1 = \det(M) = \lambda_1\lambda_2$ impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, ce qui donne $M = I_2$ ou $M = -I_2$ (M est diagonalisable). Sinon, on peut écrire $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On a ensuite $2\cos\theta = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{Z}$, donc $\cos\theta \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$. On en déduit que $\lambda_1 \in \{j, j^2, -j, -j^2, i, -i\}$.

Nous avons donc démontré que M est d'ordre 1, 2, 3, 6 ou 4.

M est d'ordre 4 quand $Sp(M) = \{-i, i\}$. La matrice A est alors de la forme $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $-a^2 - bc = 1$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces matrices.

Il est classique que A est semblable à la matrice R_1 et on peut facilement expliciter une matrice de passage P entière, par exemple $P = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, telle que $P^{-1}AP = R_1$. On cherche ici à démontrer l'existence d'une matrice $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $P^{-1}AP = R_1$ ou R_2. Nous allons donc transformer A en R_1 ou R_2, en utilisant exclusivement les quatre matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_4 = P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci n'est pas restrictif, car on peut montrer que les matrice P_1 et P_3 engendrent le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$. Pour $A = A(a,b,c) \in \mathcal{S}$, nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A &= \{P_1^{-1}AP_1,\ P_2^{-1}AP_2,\ P_3^{-1}AP_3,\ P_4^{-1}AP_4\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a-c & b+2a-c \\ c & c-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c & b-2a-c \\ c & -a-c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & b \\ c-2a-b & -a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & b \\ c+2a-b & b-a \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Nous allons définir une suite (finie) de matrices $(A_i)_{0\le i\le k}$ avec :

- $A_0 = A = A(a_0, b_0, c_0)$;

- $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $A_{i+1} = A(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}) \in \mathcal{P}_{A_i}$;

- $|a_0| > |a_1| > \cdots > |a_k| = 0$.

Si $a = 0$, $k = 0$; sinon, on a $|bc| = 1 + a^2$, ce qui impose que $|b| \le |a|$ ou $|c| \le |a|$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $|bc| \ge (|a|+1)^2 = 1 + 2|a| + a^2 > 1 + a^2$. On en déduit que l'une des quatre valeurs $a-c$, $a+c$, $a-b$ ou $a+b$ a une valeur absolue strictement inférieure à celle de a. Par exemple, si $|b| \le |a|$ et $a > 0$, on a $|a-b| = a-b < a$ si $b > 0$ et $|a+b| = a+b < a$ si $b < 0$ (b est toujours non nul car $|bc| \ge 1$). Ainsi, on peut choisir $A_1 = A(a_1, b_1, c_1) \in \mathcal{P}_A$ telle que $|a_1| < |a| = |a_0|$. Par itération, on construit la suite finie $(A_i)_{0\le i\le k}$ (les $|a_i|$ sont des entiers naturels qui décroissent strictement : la construction s'arrête).

Nous avons donc construit une matrice A_k conjuguée à A dans $SL_2(\mathbb{Z})$, avec $A_k = \begin{pmatrix} 0 & b_k \\ c_k & 0 \end{pmatrix}$. Comme $b_kc_k = -1$, on a soit $A_k = R_1$, soit $A_k = R_2$.

Remarques : a) on a $b_ic_i < 0$ pour tout i et soit $b_{i+1} = b_i$, soit $c_{i+1} = c_i$; on en déduit que b_k a le même signe que b_0. Ainsi, A est conjuguée à R_1 si $b < 0$ et à R_2 si $b > 0$.

b) R_1 et R_2 ne sont pas conjuguées dans $SL_2(\mathbb{Z})$ car pour $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a $\left(P^{-1}R_1P\right)_{2,1} = \alpha^2 + \gamma^2 > 0$.

68) a) Si A possède un hyperplan stable, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ et $\lambda \in K$. On en déduit que λ est une valeur propre de A.

Réciproquement, supposons que A possède une valeur propre λ. Par la formule du rang, $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)$ est de dimension au plus $n-1$. On peut donc choisir un hyperplan H tel que $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)\subset H$ et H est stable par A :

$$\forall X\in H,\ AX=(A-I_n)X+X\in \mathrm{Im}\,(A-\lambda I_n)+H\subset H.$$

Remarque : on peut aussi dire que λ est valeur propre de ${}^tA$ et démontrer que si U est un vecteur propre de ${}^tA$, l'hyperplan $H=\{X\in K^n,\ {}^tU\,X=0\}$ est stable par A.

Cette seconde méthode permet de traiter plus facilement la condition d'unicité : A possède un unique hyperplan stable si et seulement si ${}^tA$ possède une unique droite propre, ce qui revient à dire que A possède un unique valeur propre $\lambda\in K$ et que $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)$ est de dimension 1. Ainsi, A possède un unique hyperplan stable si et seulement si $\mathrm{Sp}_K(A)=\{\lambda\}$ et $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)=n-1$.

b) Supposons que $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède exactement trois plans stables. La matrice $B={}^tA$ possède alors exactement 3 droites stables, i.e. 3 droites propres. En notant e_1, e_2 et e_3 des vecteurs directeurs de ces droites, les vecteurs propres associées à ces vecteurs propres sont deux à deux distinctes. En effet, si l'on avait par exemple $Be_1=\lambda e_1$ et $Be_2=\lambda e_2$, on aurait $B(e_1+\alpha e_2)=\lambda(e_1+\alpha e_2)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, ce qui donnerait une infinité de droites stables par B. Nous avons donc démontré que B, donc également A, possédait 3 valeurs propres réelles distinctes.

Réciproquement, si A (et donc B) possède 3 valeurs propres réelles distinctes, B possède exactement 3 droites stables, qui sont ses trois droites propres, et A possède exactement 3 plans stables (qui sont les plans orthogonaux aux droites stable par B).

69) a) On a facilement par récurrence :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ A^kB-BA^k=kA^k$$

En notant Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $M\longmapsto MB-BM$, ceci s'écrit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \Phi(A^k)=kA^k.$$

Ainsi, si A n'était pas nilpotente, A^k serait, pour tout $k\in\mathbb{N}$, vecteur propre de Φ associé à la valeur propre k, ce qui est absurde car Φ a au plus n^2 valeurs propres.

b) Si on travaille sur le corps $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on peut écrire :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ A^kB-BA^k=kA^k=\overline{k}\,A^k$$

où $\overline{k}$ désigne la classe de k modulo p. Nous allons une nouvelle fois faire une preuve par l'absurde en supposant que A n'est pas nilpotente. Chaque $\overline{k}$ est alors valeur propre de Φ, qui possède donc au moins p valeurs propres distinctes. Pour obtenir une absurdité, il faudrait que Φ soit un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension strictement moins grande que p. L'idée consiste à restreindre Φ ; notons F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ engendré par les puissances de A : $F=\mathrm{Vect}(A^k,\ k\in\mathbb{N})$. Comme le polynôme caractéristique de A annule A (théorème de Cayley-Hamilton), F est engendré par la famille $(I_n,A,\dots,A^{n-1})$ et donc F est de dimension au plus n. Comme pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\Phi(A^k)\in F$, F est stable par Φ et la restriction de Φ à F possède au moins p valeurs propres distinctes, ce qui est absurde car $p>n\geq\dim(F)$.

Remarque : nous utilisons le théorème de Cayley-Hamilton pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Voici une preuve de ce théorème valable dans un corps K quelconque :

Soient E un K-ev de dimension fini et $f\in\mathcal{L}(E)$. Si x est un vecteur de E, il existe un entier $k\leq n$ tel que $\mathcal{L}=(x,f(x),\dots,f^{k-1}(x))$ est libre et $(x,f(x),\dots,f^{k-1}(x),f^k(x))$ est liée. Il existe donc $a_0,\dots,a_{k-1}\in K$ tels que :

$$f^k(x)=a_0x+a_1f(x)+\cdots+a_{k-1}f^{k-1}(x)$$

ce qui s'écrit $P(f)(x)=0$ en posant $P=X^k-a_{k-1}X^{k-1}-\cdots-a_0$.

On peut d'autre part compléter $\mathcal{L}$ en une base $\mathcal{B}$ et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ où A est la matrice compagnon associée au polynôme P :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P = \chi_A$ divise $\chi_f = \chi_A \times \chi_C$. Ainsi, $\chi_f(f)(x) = (\chi_C(f) \circ P(f))\,(x) = \chi_C(f)(0) = 0$. Ceci démontrer que $\chi_f(f) = 0$.

Cette preuve utilise la notion de *polynôme minimal de f en x* : si $x \in E$, l'ensemble $I_{x,f} = \{P \in K[X],\ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal non réduit $\{0\}$; son générateur normalisé (c'est le polynôme P défini ci-dessus) est noté $\pi_{x,f}$: c'est le polynôme minimal de f en x. La preuve précédente montre que :

$$\forall x \in E,\ \pi_{x,f} \text{ divise } \chi_f.$$

Comme l'idéal annulateur de f est l'intersection des $I_{x,f}$:

$$I_f = \{P \in K[X],\ P(f) = 0\} = \bigcap_{x \in E} I_{x,f},$$

le polynôme minimal de f est le p.p.c.m des $\pi_{x,f}$ pour x décrivant E, ce qui prouve le théorème de Cayley-Hamilton : π_f divise χ_f. On peut aussi écrire :

$$\pi_f = \pi_{e_1,f} \vee \pi_{e_2,f} \vee \dots \pi_{e_n,f}$$

où $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E, ce qui permet de calculer assez facilement π_f. Par exemple, on montre facilement que si A est la matrice compagnon associé à un polynôme normalisé P, alors $\pi_A = \chi_A = P$. En effet, si e_1 est le premier vecteur de la base canonique de K^n, on a $\pi_{e_1,A} = P$, ce qui prouve que $P = \chi_A$ (car $\pi_{e_1,A}$ divise χ_A et les deux polynômes sont normalisés et de même degré), puis que $\pi_A = P$ (car $P = \pi_{e_1,A} \mid \pi_A \mid \chi_A = P$).

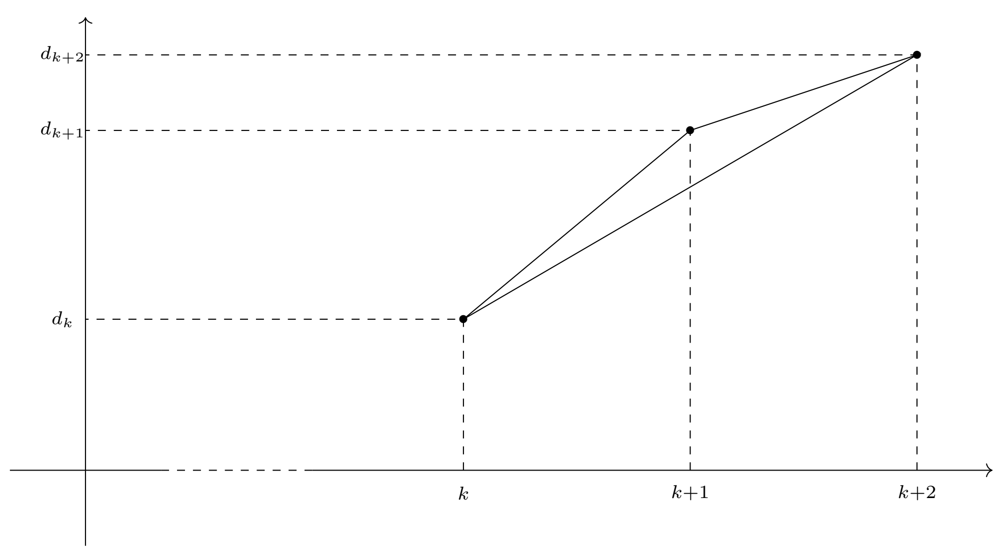
70)

Pour $k \in \mathbb{N}$, notons d_k la dimension du noyau de u^k. Commençons par remarquer que l'on a

$$\{0\} = \mathrm{Ker}(u^0) \subset \mathrm{Ker}(u) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u^k) \subset \dots$$

et la suite d est croissante.

La convexité de la suite se traduit pas le schéma :



ce qui s'écrit $d_{k+1} \geq \dfrac{d_k + d_{k+2}}{2}$, ou encore $d_{k+1} - d_k \geq d_{k+2} - d_{k+1}$. Ces différences de dimensions font penser à la dimension de supplémentaires ; il est donc naturel d'introduire F tel que $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) \oplus F = \mathrm{Ker}(u^{k+2})$. Considérons la restriction v de u à F. On montre facilement :

- $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$;
- $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u) \cap F \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1}) \cap F = \{0\}$;
- $\mathrm{Ker}(u^k) \cap v(F) = \{0\}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u^k) \oplus v(F) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $v(F)$ a même dimension que F (v est injective). Cela donne :

$$d_{k+2} - d_{k+1} = \dim(F) = \dim(v(F)) \leq d_{k+1} - d_k.$$

Remarque : cette preuve un peu améliorée permet de décrire les endomorphismes nilpotents, puis d'atteindre la décomposition de Jordan d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé.

71) La réponse est négative. Quand une matrice réelle N a une valeur propre complexe $a + ib$ non réelle, la valeur propre conjuguée $a - ib$ a les mêmes propriétés que $a + ib$; par exemple, les espaces propres associés à $a + ib$ et $a - ib$ ont la même dimension. Pour construire un contre-exemple, il suffit donc de choisir M complexe telle que χ_M soit réelle, avec deux valeurs propres conjuguées associées à des espaces propres de dimensions différentes. Par exemple

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_M = (X - i)^2(X + i)^2 = (1 + X^2)^2 \in \mathbb{R}[X]$ avec $\mathrm{rg}(M - iI_4) = 2$ et $\mathrm{rg}(M + iI_4) = 3$. Si N était une matrice réelle semblable à M, on aurait

$$3 = \mathrm{rg}(M + iI_4) = \mathrm{rg}(N + iI_4) = \mathrm{rg}(\overline{N + iI_4}) = \mathrm{rg}(N - iI_4) = \mathrm{rg}(M - iI_4) = 2$$

ce qui est absurde.

Remarque : pour toute matrice carrée complexe A, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ et donc pour toute matrice complexe A, $\mathrm{rg}(\overline{A}) = \mathrm{rg}(A)$ puisque le rang d'une matrice est la taille du plus grand déterminant non nul extrait de A.

72) Nous allons utiliser quelques propriétés élémentaires :

(a) si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec f diagonalisable, alors f et g commutent si et seulement si les espaces propres de f sont stables par g ;

(b) si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $f \circ g = g \circ f$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est stable par g ;

(c) si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $f \circ g = g \circ f$, alors $P(f)$ et g commutent.

On utilise la décomposition de Dunford de f : il existe d diagonalisable, n nilpotent tels que $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. Les espaces propres de d sont les espaces caractéristiques de f, i.e. les $F_i = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i)^{m_i}\right)$ en posant $\pi_f = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{m_i}$. On en déduit que ces espaces sont stables par g (propriété **c**) puis que g et d commutent (propriété **a**). Comme $n = f - d$, g commute également avec n. Nous avons ensuite :

$$f + g = d + n + g = d(Id + n') \text{ avec } n' = d^{-1} \circ (n + g).$$

En choisissant pour chaque i une racine carrée μ_i de λ_i, l'endomorphisme d' défini par $\forall i,\ \forall x \in F_i,\ d'(x) = \mu_i x$ est une racine carrée de d. Cet endomorphisme est diagonalisable et admet les F_i pour sous-espaces propres. On en conclut (propriété **a**) qu'il commute avec d, n et g, donc avec n'.

Comme d^{-1}, n et g, commutent deux à deux, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (n')^k = d^{-k} \circ \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i \circ g^{k-i}$$

donc $(n')^k = 0$ dès que k est supérieur à la somme des indices de nilpotence de n et de g : n' est nilpotent.

On utilise ensuite une analogie avec l'expression $\sqrt{1+x} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{1/2}{m} x^m$, valable pour $x \in [-1, 1[$ et on définit :

$$h' = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{1/2}{m} (n')^m$$

(la somme est finie car n' est nilpotent). On peut écrire :

$$(h')^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{1/2}{i} \binom{1/2}{m-i} \right) (n')^m = Id + n'$$

En effet, on a par produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ 1 + x = \left(\sqrt{1+x}\right)^2 = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{1/2}{m} x^m \right)^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{1/2}{i} \binom{1/2}{m-i} \right) x^m$$

et l'unicité du développement en série entière donne :

$$\forall m \geq 0,\ \sum_{i=0}^{m} \binom{1/2}{i} \binom{1/2}{m-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \text{ ou } m = 1\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme h' est un polynôme en n' et que d' commute avec n', h' et d' commutent. Nous pouvons enfin conclure :

$$(d' \circ h')^2 = (d')^2 \circ h^2 = d \circ (Id + n') = f + g.$$