Problème de Mathématiques

Référence pp2002 — Version du 6 décembre 2025

---

1. Soient E, un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f, un endomorphisme de E tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

1. a. Démontrer que n est pair et exprimer le rang de f en fonction de n.
1. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad (f \circ f)(x) = 0.$$

2. Soit $f \in L(E)$ tel que $f \circ f = 0$. On suppose que

$$\dim E = 2 \operatorname{rg} f.$$

Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

Partie A.

Soit f, un endomorphisme de rang p tel que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

3. Exprimer la dimension n de E en fonction de p.
4. Soit F, un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. On note

$$\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_p) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_p)$$

des bases de F et $\operatorname{Ker} f$ respectivement.
4. a. Que dire de la famille

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_p) \quad ?$$

4. b. Démontrer que la famille

$$\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$$

est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. c. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $e_{p+i} = f(e_i)$. Calculer $f(e_{p+i})$.
4. d. Démontrer que la famille

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$$

est une base de E. Écrire la matrice de f relative à cette base.

Partie B.

On considère ici $E = \mathbb{R}^4$ et l'endomorphisme f représenté dans la base canonique de E par la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et en déduire, sans calcul supplémentaire, la matrice A^2.
6. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
7. Calculer la matrice de passage de la base canonique à une telle base $\mathscr{C}$.

Solution ❀ Noyau et image d'un endomorphisme

1. a. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2 \operatorname{rg} f,$$

ce qui prouve bien que la dimension n de E est *paire*.

1. b. Pour tout $x \in E$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, donc

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 0_E.$$

2. Soit $y \in \operatorname{Im} f$: il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent,

$$f(y) = (f \circ f)(x) = 0_E$$

ce qui prouve que $y \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

On applique à nouveau le théorème du rang :

$$2 \operatorname{rg} f = \dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f$$

donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$. Par inclusion et égalité des dimensions, les deux sous-espaces vectoriels sont égaux : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Partie A.

3. D'après **1.a.**, $n = 2p$.

4. a. Comme $\mathscr{B}_1$ est une base de F, que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et que $E = F \oplus \operatorname{Ker} f$, alors la famille $\mathscr{B}$, obtenue en rassemblant les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_2$, est une base de E.

4. b. L'image par f de la base $\mathscr{B}$ est (toujours !) une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Comme les vecteurs e'_k appartiennent à $\operatorname{Ker} f$, on en déduit que

$$\big(f(e'_1), \dots, f(e'_p)\big) = (0_E, \dots, 0_E)$$

et par conséquent

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e),\ e \in \mathscr{B}) = \operatorname{Vect}(f(e_k),\ 1 \leqslant k \leqslant p).$$

La famille $\big(f(e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

❧ Vérifions maintenant que cette famille est libre : considérons des scalaires $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f(e_k) = 0_E.$$

Par linéarité de f, cela signifie que le vecteur

$$\sum_{k=1}^{p} a_k e_k$$

appartient à $\operatorname{Ker} f$. Or ce vecteur appartient, par définition de $\mathscr{B}_1$, au sous-espace F. Par construction, $\operatorname{Ker} f$ et F sont en somme directe, donc

$$\sum_{k=1}^{p} a_k e_k = 0_E$$

et comme la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre, on en déduit que les scalaires a_k sont tous nuls : cqfd.

❧ La famille $\big(f(e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p}$, libre et génératrice, est donc bien une base de $\operatorname{Im} f$.

4. c. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$f(e_{p+1}) = (f \circ f)(e_i) = 0_E$$

puisque $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

4. d. D'après **4.b.**, la famille $\mathscr{B}_2 = (e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ est une base de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. D'après **4.a.**, la famille $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$ est une base de E. Par définition des e_{p+k} et d'après **4.c.**,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{d+1}(\mathbb{R})$$

Partie B.

5. On rappelle que l'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice.

On remarque que les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins égal à 2.

D'autre part, $C_1 - C_4 = 0$ et $C_2 - C_3 = 0$, donc les vecteurs $(1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, 0)$ (qui ne sont pas proportionnels) appartiennent au noyau de f, donc la dimension du noyau de f est au moins égale à 2.

D'après le théorème du rang, $4 = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$, donc

$$\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f = 2$$

et par conséquent

— le couple (C_1, C_2) est une base de $\operatorname{Im} f$;

— le couple $(-C_2, -C_1)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

En particulier, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. D'après **1.b.**, l'application f^2 est l'endomorphisme nul et donc $A^2 = 0$.

6. On a démontré que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. D'après **4.**, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc triangulaire (inférieure).

7. On a vu plus haut, au **4.d.**, qu'il suffit de choisir $\mathscr{C} = \mathscr{B}_0$.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (triangulaire avec des coefficients diagonaux tous distincts de 0), ce qui prouve que ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^4$. D'après **5.**, les deux dernières colonnes forment une base de $\operatorname{Ker} f$. Les deux premières colonnes forment donc une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^4$.

Les troisième et quatrième colonnes étant les images respectives des première et deuxième colonne, on en déduit que la matrice P est bien la matrice de passage de la base canonique à une base du type de la base $\mathscr{B}_0$ définie au **4.d.** et répond donc à la question posée.