Problème de Mathématiques

Référence pp2005 — Version du 6 décembre 2025

Partie A.

Dans cette partie, l'espace $E = \mathbb{R}^d$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ (quelconque).

On **rappelle** qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur $\ell \in E$ si, et seulement si,

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On suppose donnée une application

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \big\|T(x) - T(y)\big\| \leqslant \alpha\|x - y\|$$

où α est une constante telle que $0 < \alpha < 1$.

On choisit un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n).$$

On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

1. a. Démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha^n\|x_1 - x_0\|.$$

1. b. En déduire que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

2. **On admet** que cette dernière propriété prouve que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^d$.

2. a. Démontrer que la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell)$.

2. b. Démontrer que $T(\ell) = \ell$.

3. Combien de solutions l'équation

$$T(x) = x$$

a-t-elle ?

Partie B.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|.$$

On ne demande pas de vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

On considère une matrice

$$C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$$

et un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$. En identifiant la matrice C à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ qui lui est canoniquement associé, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad T(x) = Cx + b.$$

4. L'application T est-elle linéaire ?

5. Justifier l'existence du réel α défini par

$$\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|.$$

Ce réel peut-il être nul ?

6. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \big\|T(x) - T(y)\big\|_\infty \leqslant \alpha\, \|x - y\|_\infty.$$

7. Soient $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ et $b_0 \in \mathbb{R}^d$. On cherche à résoudre l'équation $Ax = b_0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^d$.

On pose $C = I_d - \lambda A$, où λ est un réel strictement positif. Comment choisir $b \in \mathbb{R}^d$ pour que

$$Ax = b_0 \iff T(x) = x?$$

8. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ directement en appliquant l'algorithme du pivot. Indiquer (sans démonstration) la complexité de cette méthode en fonction de d.

9. On choisit de résoudre l'équation $Ax = b_0$ par approximations successives en résolvant $T(x) = x$ avec la méthode décrite dans la **partie A**.

9. a. Comment choisir λ pour que cette méthode puisse s'appliquer ?

Dans la suite de cette question, on supposera que cette condition sur λ est satisfaite.

9. b. Estimer la complexité de cette méthode en fonction de d et du nombre n d'itérations effectuées.

9. c. Dans quelle mesure cette méthode est-elle plus intéressante que l'algorithme du pivot ?

Partie C.

Dans cette dernière partie, on se place dans $\mathbb{R}^3$ et on étudie l'équation $Ax = b_0$ définie par

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Suivant l'étude de la **partie B**, on pose $C = I_3 - \lambda A$.

10. Comment choisir λ pour que $\alpha < 1$?

11. Le choix $\lambda = 1/4$ assure bien que $\alpha < 1$. À l'aide d'un raisonnement graphique, proposer un meilleur choix de λ.

12. Résoudre $Ax = b_0$ (par l'algorithme du pivot).

Solution ❀ Résolution itérative d'un système linéaire

Partie A.

1. a. Supposons [HR] que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

soit établi.

Alors, comme T est α-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\|x_{n+2} - x_{n+1}\| &= \big\|T(x_{n+1}) - T(x_n)\big\| \\ &\leqslant \alpha\, \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leqslant \alpha^{n+1}\, \|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de l'hypothèse de récurrence. On a ainsi démontré que la propriété [HR] était héréditaire.

Comme par ailleurs la propriété [HR] est évidemment vérifiée pour $n = 0$, elle est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Comme $0 < \alpha < 1$, la série géométrique $\sum \alpha^n$ est convergente.

D'après la question précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \underbrace{\|x_1 - x_0\|}_{C^{te}}\, \alpha^n.$$

Le critère de comparaison pour les séries de terme général positif montre alors que la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

Remarque.— On a ainsi démontré la convergence absolue de la série télescopique $\sum (x_{n+1} - x_n)$. Comme E est un espace de dimension finie, cela prouve que cette série converge dans E et donc que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

2. a. Comme T est α-lipschitzienne,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \big\|T(x_n) - T(\ell)\big\| \leqslant \alpha\|x_n - \ell\|.$$

Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ℓ, donc la suite de terme général $\|x_n - \ell\|$ converge vers 0 et, par encadrement, la suite de terme général $\|T(x_n) - T(\ell)\|$ tend vers 0.

Par définition, cela signifie que la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $T(\ell) \in E$.

2. b. En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite ℓ, la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Or

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = T(x_n)$$

donc $T(\ell) = \ell$ par unicité de la limite.

3. On vient de démontrer que l'équation $T(x) = x$ admet au moins une solution $\ell \in E$.

Si cette équation admet deux solutions ℓ_1 et ℓ_2, alors

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \big\|T(\ell_1) - T(\ell_2)\big\| \leqslant \alpha\, \|\ell_1 - \ell_2\|$$

(puisque T est α-lipschitzienne). On en déduit que

$$\underbrace{(\alpha - 1)}_{<0}\ \underbrace{\|\ell_1 - \ell_2\|}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

donc que $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$ et enfin que $\ell_1 = \ell_2$.

L'équation $T(x) = x$ admet donc exactement une solution dans E.

Partie B.

4. Il est clair que $T(0_E) = b$. Par conséquent, si $b \neq 0_E$, alors T n'est pas linéaire.

Réciproquement, si $b = 0_E$, alors $T = C$ est bien une application linéaire.

L'application T est donc linéaire si, et seulement si, $b = 0_E$.

5. Toute famille *finie* de nombres réels admet un plus grand élément, ce qui justifie l'existence de α.

❧ Le plus grand élément est un majorant. Par conséquent, si $\alpha = 0$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad 0 \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}| \leqslant \alpha = 0.$$

Si une somme de termes positifs est nulle, alors chaque terme est nul. On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad c_{i,j} = 0$$

et donc que $C = 0$.

La réciproque étant évidente, on en déduit que $\alpha = 0$ si, et seulement si, la matrice C est la matrice nulle.

6. Par définition de T et linéarité de C,

$$T(x) - T(y) = C(x - y).$$

D'après la règle du calcul matriciel, la i-ième coordonnée du vecteur $C(x - y)$ est égale à

$$\sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j).$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \left| \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\, |x_j - y_j|.$$

Comme le max est un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad |x_j - x_j| \leqslant \|x - y\|_\infty$$

et comme tous les $|c_{i,j}|$ sont positifs,

$$\sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\, |x_j - y_j| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\, \|x - y\|_\infty.$$

Comme le max est un majorant et que $\|x - y\|_\infty \geqslant 0$,

$$\sum_{j=1}^{d} |c_{i,j}|\, \|x - y\|_\infty \leqslant \alpha\, \|x - y\|_\infty.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \left| \sum_{j=1}^{d} c_{i,j}(x_j - y_j) \right| \leqslant \alpha\, \|x - y\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant du paramètre i, on peut donc passer au sup :

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty = \|C(x - y)\|_\infty \leqslant \alpha\, \|x - y\|_\infty$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} Ax = b_0 &\iff \lambda Ax = \lambda b_0 \\ &\iff x = (x - \lambda Ax) + \lambda b_0 \\ &\iff x = (I_d - \lambda A)(x) + \lambda b_0. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $b = \lambda b_0$ pour que la résolution de $Ax = b_0$ se ramène à la résolution de $T(x) = x$.

8. On **sait** que la complexité de l'algorithme du pivot est $\mathcal{O}(d^3)$.

9. a. Pour que la méthode de la **partie A** puisse s'appliquer, il suffit de choisir $\lambda > 0$ de telle sorte que $\alpha < 1$.

Mais rien ne prouve qu'un tel choix soit toujours possible !

9. b. À chaque itération, on passe de x_k à x_{k+1} en appliquant T, c'est-à-dire en multipliant la colonne x_k par la matrice C et en ajoutant la colonne b. Les multiplications entre réels étant des opérations sensiblement plus coûteuses que les additions, c'est le nombre de multiplications qui va indiquer la complexité de l'opération.

Il faut calculer d coordonnées pour x_{k+1} et, pour chaque coordonnée, il faut effectuer d multiplications. Par conséquent, la complexité de chaque itération est en $\mathcal{O}(d^2)$ et la complexité de l'algorithme en $\mathcal{O}(nd^2)$ (puisqu'on effectue n itérations).

9. c. Cette méthode est plus intéressante que l'algorithme du pivot si :

— on peut effectivement choisir λ pour que $\alpha < 1$;
— on effectue sensiblement moins d'opérations que pour l'algorithme du pivot, soit pour $n \ll d$;
— d'après **[[2.a.]]**, on sait dominer l'erreur résiduelle après la n-ième itération :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - \ell\| \leqslant \alpha^n \, \|x_0 - \ell\|$$

il faut donc choisir x_0 assez proche de ℓ (mais comment ???) et α assez proche de 0 (est-ce possible ???) pour que le nombre n d'itérations soit petit devant la dimension d.

Ça commence à faire beaucoup de *si* !

Partie C.

10. On a

$$C = \begin{pmatrix} 1-4\lambda & \lambda & \lambda \\ -\lambda & 1-4\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1-5\lambda \end{pmatrix}$$

donc

$$\alpha = \max\bigl\{|1-4\lambda| + 2|\lambda|;\ |1-5\lambda| + 2|\lambda|\bigr\}$$

(les contributions des deux premières lignes de C sont identiques) et $\alpha < 1$ si, et seulement si,

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| < 1 \quad \textbf{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| < 1.$$

11. Pour $\lambda = 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |1-5\lambda| + 2|\lambda| = \frac{3}{4}$$

donc $\alpha = 3/4 < 1$.

❧ Pour $0 < \lambda \leqslant 1/4$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 4\lambda + 2\lambda = 1 - 2\lambda$$

tandis que pour $1/4 \leqslant \lambda$, on a

$$|1-4\lambda| + 2|\lambda| = 4\lambda - 1 + 2\lambda = 6\lambda - 1.$$

D'autre part, pour $0 < \lambda \leqslant 1/5$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 1 - 5\lambda + 2\lambda = 1 - 3\lambda$$

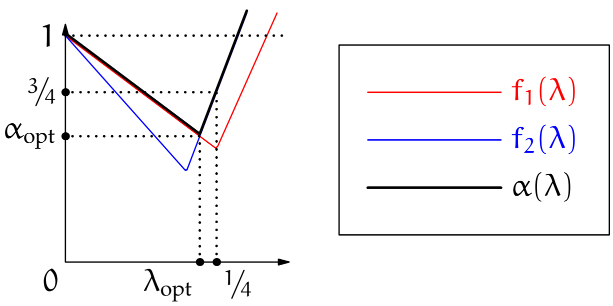
tandis que pour $1/5 \leqslant \lambda$, on a

$$|1-5\lambda| + 2|\lambda| = 5\lambda - 1 + 2\lambda = 7\lambda - 1.$$

On peut ainsi facilement tracer les graphes des fonctions

$$f_1 = [\lambda \mapsto |1-4\lambda| + 2|\lambda|] \quad \text{et} \quad f_2 = [\lambda \mapsto |1-5\lambda| + 2|\lambda|]$$

et en déduire le graphe de leur maximum, c'est-à-dire le graphe de $[\lambda \mapsto \alpha]$.



On voit ainsi qu'en prenant λ un peu inférieur à $1/4$, on obtient un α sensiblement plus petit (proche de $1/2$).

12. La résolution détaillée doit figurer sur la copie. En particulier, chaque étape de l'algorithme doit être codée selon les notations usuelles.

La solution du système est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$