Problème de Mathématiques

Référence pp2011 — Version du 6 décembre 2025

La base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ est notée

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

On étudie l'endomorphisme u de E représenté dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ par la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 8 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^4$ sera noté (x, y, z, t).

1. La matrice A possède une valeur propre évidente : laquelle ? Calculer un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2. Quelle est la dimension du sous-espace $H = [x = 0]$? Démontrer que ce sous-espace H est stable par u.

3. Déterminer une matrice inversible

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que $Q_1^{-1} A Q_1$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$$

en faisant aussi peu de calculs que possible.

4. On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. a. Calculer le polynôme minimal de N.

4. b. Vérifier que N est une matrice de rang 2. Calculer un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} N$ et une équation cartésienne de $\operatorname{Im} N$.

4. c. Calculer une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} N^2$.

4. d. La matrice N peut-elle être semblable à la matrice suivante ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. e. On suppose qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1} N P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note C_1, C_2 et C_3, les colonnes de P.

Que dire des colonnes NC_1, NC_2 et NC_3 ?

4. f. On choisit une colonne X_0 qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker} N^2$: donner un exemple d'une telle colonne. Calculer NX_0 et N^2X_0. Vérifier que les trois colonnes X_0, NX_0 et N^2X_0 sont linéairement indépendantes. Conclure.

5. Expliciter une matrice inversible $Q_0 \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $Q_0^{-1}AQ_0 = T$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

Solution ❀ Trigonalisation d'une matrice

1. La première ligne de A montre que -1 est une valeur propre de ${}^tA$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$, donc -1 est une valeur propre de A. Il s'agit maintenant d'identifier le noyau de

$$A - (-1)I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ce calcul est sans mystère, il suffit d'appliquer l'algorithme du pivot.

$$\mathrm{Ker}(A + I_4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

REMARQUE.— Avec Python, on peut appliquer l'algorithme du pivot en se réservant le choix des opérations de pivot et en déléguant l'exécution de ces opérations.

```
import numpy as np
import sympy as sp

A = sp.Matrix([[-1,0,0,0],
               [-7,-1,2,-3],
               [3,5,0,4],
               [8,7,-2,7]])
A1 = A+sp.eye(4)
A1b = sp.Matrix(np.vstack((A1, sp.eye(4))))
A1b[:,0] += 3*A1b.col(2)
A1b[:,3] += 2*A1b.col(2)
A1b[:,2] += 2*A1b.col(0)
A1b[:,3] += A1b.col(0)
A1b[:,2] -= A1b.col(3)
A1b[:,1] -= 5*A1b.col(2)
A1b[:,3] -= 12*A1b.col(2)
A1b[:,3] -= 2*A1b.col(1)
```

Mais on peut aussi éviter tout effort (ce que je désapprouve fortement).

```
A1.nullspace()
```

2. En tant que noyau de la forme linéaire

$$[(x, y, z, t) \mapsto x],$$

l'ensemble H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, donc un sous-espace de dimension 3.

La famille (e_2, e_3, e_4) est une famille libre (en tant que sous-famille de la base canonique $\mathscr{B}_0$) de trois vecteurs qui appartiennent au sous-espace H. Comme $\dim H = 3$, il s'agit d'une base de H. D'après les trois dernières colonnes de la matrice A, l'image par u de chacun de ces trois vecteurs est une combinaison linéaire de e_2, e_3 et e_4. Ainsi

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant 4, \quad u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4) = H$$

ce qui prouve que H est stable par u.

REMARQUE.— Variante matricielle : si la colonne X représente un vecteur $x \in H$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, alors X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

et la colonne AX, qui représente $u(x)$ dans la base canonique est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $u(x) \in H$.

3. Quels que soient les valeurs choisies pour a, b et c, la matrice Q_1 est inversible car elle est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont différents de 0.

La matrice $Q_1^{-1}AQ_1$ représente l'endomorphisme u dans une base $\mathscr{B} = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de E et Q_1 est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$.

D'après la première colonne de $Q_1^{-1}AQ_1$, le premier vecteur de $\mathscr{B}$ est un vecteur propre de u associé à -1, donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(e'_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

D'après les trois dernières colonnes de Q_1,

$$e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3 \quad \text{et} \quad e'_4 = e_4.$$

La seule possibilité est donc

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la deuxième colonne de la matrice A,

$$\begin{aligned} u(e_2) &= 0 \cdot e_1 - e_2 + 5 \cdot e_3 + 7 \cdot e_4 \\ &= \qquad\;\; - e_2 + 5 \cdot e_3 + 7 \cdot e_4 \\ &= 0 \cdot e'_1 - e'_2 + 5 \cdot e'_3 + 7 \cdot e'_4 \end{aligned}$$

donc la deuxième colonne de $Q_1^{-1}AQ_1$ est la même que la deuxième colonne de A. Idem pour les troisième et quatrième colonnes (parce que le sous-espace H est stable par u). Par conséquent,

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Remarque.— Vérification électronique :

```
Q1 = sp.eye(4)
V = A1.nullspace()[0]
Q1[:,0] = V/V[0,0]
B1 = Q1**(-1)*A*Q1[1:,1:]
```

4. a. On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0_3.$$

Le polynôme X^3 est un polynôme annulateur unitaire de u, donc le polynôme minimal est un diviseur unitaire non constant de X^3 : les seules possibilités sont donc X, X^2 et X^3. Or $N \neq 0_3$ et $N^2 \neq 0_3$, donc ni X, ni X^2 ne sont des polynômes annulateurs de u...

Le polynôme minimal de u est donc X^3.

4. b. Les deux premières colonnes de N ne sont pas proportionnelles, donc le rang de N est au moins égal à 2.

Comme N est nilpotente, elle n'est pas injective, donc son rang est strictement inférieur à 3.

Le rang de N est donc bien égal à 2.

❧ Un calcul simple (pivot sur les colonnes !) montre que

$$\operatorname{Ker} N = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

❧ L'image de N est le sous-espace engendré par les colonnes de cette matrice. On sait qu'il s'agit d'un plan et que les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc l'image de N est le sous-espace engendré par les deux premières colonnes de N.

Il s'agit donc de trouver trois réels a, b et c tels que

$$-3a + 5b + 7c = 0 \quad \text{et} \quad a - b - c = 0.$$

On en déduit (résolution, par la méthode du pivot, d'un système homogène de deux équations linéaires en trois inconnues) qu'une équation cartésienne de Im N est

$$x + 2y - z = 0.$$

REMARQUE.— On peut aussi trouver les coefficients de l'équation cartésienne en calculant le produit vectoriel (*cross product* en néo-french) des deux colonnes.

```
normale = N.col(0).cross(N.col(1))
```

4. c. On *voit* que N^2 est une matrice de rang 1 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ligne donne une équation cartésienne du noyau de N^2 :

$$\begin{aligned} N^2X = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (-x - 2y + z) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

On constate ainsi que

$$\operatorname{Ker} N^2 = \operatorname{Im} N,$$

ce qui n'a rien de surprenant : comme $N^3 = N^2 \times N = 0_3$, il est clair que $\operatorname{Im} N \subset \operatorname{Ker} N^2$ et comme

$$\dim \operatorname{Ker} N = 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} N^2 = 2,$$

on déduit du théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Im} N = 2 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} N^2 = 1.$$

4. d. Le rang de N est égal à 2 alors que le rang de la matrice triangulaire est égal à 1. Comme deux matrices semblables ont même rang, la matrice N ne peut pas être semblable à cette matrice triangulaire.

4. e. Soit ν, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme P est inversible, il existe une base

$$\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C}$ et, d'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}NP$ représente l'endomorphisme ν dans la base $\mathscr{C}$.

D'après les colonnes de $P^{-1}NP$,

$$\nu(\varepsilon_1) = 0, \quad \nu(\varepsilon_2) = \varepsilon_1, \quad \nu(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$$

donc

$$\begin{aligned} NC_1 &= \mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(\nu(\varepsilon_1)\big) = 0, \\ NC_2 &= \mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(\nu(\varepsilon_2)\big) = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = C_1, \\ NC_3 &= \mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(\nu(\varepsilon_3)\big) = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_2) = C_2 \end{aligned}$$

et ainsi

$$C_1 = N^2C_3 \quad \text{et} \quad C_2 = NC_3.$$

4. f. Le vecteur

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ne vérifie pas l'équation cartésienne de $\operatorname{Ker} N^2$, donc il n'appartient pas à $\operatorname{Ker} N^2$. On déduit de N et N^2 que

$$NX_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^2X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(en extrayant la deuxième colonne de chaque matrice).

Les colonnes X_0 et NX_0 ne sont pas proportionnelles et il est assez clair que la colonne N^2X_0 n'est pas une combinaison linéaire de X_0 et de NX_0, donc ces trois colonnes sont linéairement indépendantes.

Cela prouve que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible. **Attention !** on a pris les trois vecteurs dans un autre ordre et on a maintenant :

$$\begin{aligned} NC_1 &= N(N^2X_0) = 0, \\ NC_2 &= N(NX_0) = C_1, \\ NC_3 &= N(X_0) = C_2. \end{aligned}$$

D'après la formule du changement de base,

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P^{-1}B_1P = P^{-1}(2I_3 + N)P &= 2I_3 + P^{-1}NP \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et $Q_0 = Q_1 \times Q_2$, c'est-à-dire

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

on définit bien une matrice inversible (produit de deux matrices inversibles) et

$$\begin{aligned} Q_0^{-1}AQ_0 &= Q_2^{-1}Q_1^{-1}AQ_1Q_2 \\ &= Q_2^{-1}\begin{pmatrix} -I_1 & \\ & B_1 \end{pmatrix} Q_2 \\ &= \begin{pmatrix} -I_1 & \\ & P^{-1}B_1P \end{pmatrix} \\ &= T. \end{aligned}$$

REMARQUE.— Pour bien comprendre les calculs qui précèdent, considérons deux matrices triangulaires par blocs (avec des blocs de mêmes tailles).

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

On sait alors que $\det(M) = \det(M_1)\det(M_3)$ et que

$$MN = \begin{pmatrix} M_1N_1 & M_1N_2 + M_2N_3 \\ 0 & M_3N_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice M est inversible si, et seulement si, les blocs diagonaux M_1 et M_3 sont inversibles et que, dans ce cas,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_4 \\ 0 & M_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si la matrice M est diagonale par blocs (soit $M_2 = 0$) et si la matrice A est aussi diagonale par blocs (avec des blocs de mêmes tailles que ceux de M) :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \begin{pmatrix} M_1^{-1} & M_4 \\ 0 & M_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1M_1 & 0 \\ 0 & A_3M_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1^{-1}A_1M_1 & 0 \\ 0 & M_3^{-1}A_3M_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

❧ Les matrices A et T sont semblables, leurs polynômes caractéristiques sont donc égaux. Comme T est une matrice triangulaire, son polynôme caractéristique est connu sous forme factorisée sans aucun calcul !

$$\chi_A = \chi_T = (X+1)(X-2)^3.$$

❧ De même, les matrices A et T sont semblables, leurs polynômes minimaux sont donc égaux. Comme la matrice T est diagonale par blocs :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix},$$

son polynôme minimal est facile à déterminer.

En effet, pour tout polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$,

$$S(T) = \begin{pmatrix} S(T_1) & 0 \\ 0 & S(T_2) \end{pmatrix}$$

donc S est un polynôme annulateur de T si, et seulement si, S est un polynôme annulateur de T_1 et de T_2. Autrement dit : μ_T divise S si, et seulement si, μ_{T_1} et μ_{T_3} divisent S. Encore autrement dit : l'idéal annulateur de T est l'intersection de l'idéal annulateur de T_1 et de l'idéal annulateur de T_2. C'est-à-dire (enfin) : μ_T est le pgcd de μ_{T_1} et de μ_{T_2}.

Pour nous, $T_1 = -I_1$, donc $\mu_{T_1} = X+1$ et $N = T_2 - 2I_3$ est nilpotente d'indice 3, donc $\mu_{T_2} = (X-2)^3$ et finalement

$$\mu_A = \mu_T = (X+1) \wedge (X-2)^3 = \chi_A.$$