Problème de Mathématiques

Référence pp2018 — Version du 6 décembre 2025

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \in \mathbb{C}.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

L'objet de ce problème est de trouver une méthode simple pour calculer le polynôme caractéristique de A :

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

et pour cela on considère le système d'équations (Σ) suivant.

$$S_1 + u_1 = 0$$

et, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \cdots + u_{k-1} S_1 + k u_k = 0$$

d'inconnue

$$(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On **admet** que

$$(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n) = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$$

est une solution du système (Σ).

1. Démontrer que les scalaires S_k sont tous réels.

2. Démontrer que le système (Σ) possède une, et une seule, solution dans $\mathbb{R}^n$.

3. Que vaut $P(A)$?

4. Démontrer que la matrice A est inversible si, et seulement si, $a_0 \neq 0$.

5. On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que A^{-1} est un polynôme en A. (On explicitera ce polynôme.)

6. On définit une famille $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels et une famille $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en posant d'abord

$$d_1 = -\operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad B_1 = A + d_1 I_n$$

et ensuite

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = \frac{-1}{k} \operatorname{tr}(B_{k-1} A)$$
$$B_k = B_{k-1} A + d_k I_n.$$

6. a. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}.$$

6. b. En déduire que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = \frac{-1}{k}\left(\operatorname{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \operatorname{tr}(A^{k-i})\right)$$

puis que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = a_{n-k}.$$

7. En déduire que B_n est la matrice nulle et indiquer l'intérêt du calcul de la matrice B_{n-1}.

8. Pour $n = 4$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. a. Justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse (par une méthode traditionnelle).
8. b. Calculer le polynôme caractéristique de A (par une méthode traditionnelle). *Exceptionnellement, on ne cherchera pas à factoriser ce polynôme.*
8. c. Calculer A^{-1} et le polynôme caractéristique de A en utilisant l'algorithme décrit ci-dessus.
9. Le listing ci-dessous fournit cinq fonctions écrites en langage Python. Les matrices seront notées comme des listes de listes.

```
def fonction1(A,B) :
  n=len(A)
  C=[]
  for i in range(n):
    L=[]
    for j in range(n):
      s=0
      for k in range(n):
        s+=A[i][k]*B[k][j]
      L.append(s)
    C.append(L)
  return C
```

```
def fonction2(x,n):
  A=[]
  for i in range(n):
    L=[0]*n
    L[i]=x
    A.append(L)
  return A
```

```
def fonction3(A):
  n=len(A)
  S=0
  for i in range(n):
    S+=A[i][i]
  return S
```

```
def fonction4(A,x):
  n=len(A)
  B=[]
  for i in range(n):
    L=[]
    for j in range(n):
      L.append(A[i][j]*x)
    B.append(L)
  return B
```

```
def fonction5(A,B):
  n=len(A)
  C=[]
  for i in range(n):
    L=[]
    for j in range(n):
      L.append(A[i][j]+B[i][j])
    C.append(L)
  return C
```

9. a. Déterminer les types d'arguments pris par chaque fonction et le résultat qu'elles retournent.
9. b. Compléter le programme ci-dessous permettant d'afficher les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A.

```
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
```

Solution ❀ Polynôme caractéristique

1. Comme A est une matrice *réelle*, son polynôme caractéristique est un polynôme à coefficients *réels* et par conséquent les racines de ce polynômes (= les valeurs propres de A) sont réelles ou deux à deux conjuguées.

Quitte à réindexer les valeurs propres, on peut donc supposer que les valeurs propres

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$$

sont réelles et que les $n - r = 2q$ autres valeurs propres sont complexes et deux à deux conjuguées :

$$\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2} = \overline{\lambda_{r+1}}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \overline{\lambda_{n-1}}.$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\overline{S_k} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\overline{\lambda_i})^k \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k + \sum_{j=1}^{q} (\overline{\lambda_{r+2j-1}}^k + \overline{\lambda_{r+2j}}^k) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k + \sum_{j=1}^{q} (\lambda_{r+2j}^k + \lambda_{r+2j-1}^k) \\
&= S_k
\end{aligned}$$

et comme $S_k = \overline{S_k}$, le scalaire S_k est réel.

2. Le système (Σ) d'inconnue $(u_1, \ldots, u_n)$ est un
— système linéaire (non homogène) de n équations à coefficients réels en n inconnues,
— ce système est triangulaire (seules u_1, ..., u_r apparaissent dans la r-ième équation)
— et les coefficients diagonaux sont tous différents de 0 (le coefficient de u_r dans la r-ième équation est égal à r).

Donc ce système admet une, et une seule, solution dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque.— D'après l'énoncé, cette solution est

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) = (a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0).$$

3. Comme P est le polynôme caractéristique de A, la matrice $P(A)$ est la matrice nulle (Théorème de Cayley-Hamilton).

4. Comme P est le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que son coefficient constant a_0 est égal à $(-1)^n \det(A)$.

Comme une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul, on en déduit que A est inversible si, et seulement si, $a_0 \neq 0$.

5. Comme A est supposée inversible, on sait que $a_0 \neq 0$ d'après la question précédente. On déduit alors de la relation $P(A) = 0_n$ que

$$A^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i = -a_0 I_n$$

c'est-à-dire

$$A\left[\frac{-1}{a_0} \cdot \left(A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i-1}\right)\right] = I_n.$$

Comme A est inversible par hypothèse, cette relation nous assure que

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} \cdot \left(A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i-1}\right)$$

et en particulier que A^{-1} est bien un polynôme en A.

6. a. Par définition,

$$B_1 = A + d_1 I_n = A^1 + \sum_{i=1}^{1} d_i A^{k-i}.$$

Supposons qu'il existe un entier $1 \leqslant k < n$ tel que

$$B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}. \tag{$\star$}$$

Par construction,

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= B_k A + d_{k+1} I_n \\ &= A^{k+1} + d_{k+1} I_n + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i+1} && \text{(HR)} \\ &= A^{k+1} + d_{k+1} A^{(k+1)-(k+1)} + \sum_{i=1}^{d} d_i A^{(k+1)-i} \\ &= A^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} d_i A^{(k+1)-i}. \end{aligned}$$

La propriété $(\star)$ est bien fondée (pour $k = 1$) et héréditaire (pour $1 \leqslant k < n$), donc elle est vraie pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

6. b. Par construction, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$d_k = \frac{-1}{k} \operatorname{tr}(B_{k-1} A) = \frac{-1}{k} \operatorname{tr}(B_k - d_k I_n)$$

et d'après la propriété établie à la question précédente

$$B_k - d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i}.$$

L'expression de d_k découle alors de la linéarité de la trace.

❧ Comme la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, elle est diagonalisable : il existe donc une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1} \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P.$$

REMARQUE.— Si les valeurs propres de A sont réelles, alors les coefficients de la matrice de passage sont réels aussi. En revanche, si certaines valeurs propres de A sont complexes, alors les coefficients de P sont complexes. Cela n'a aucune importance sur la suite de la discussion.

On en déduit que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad A^k = P^{-1} \operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P$$

et donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = S_k.$$

❧ La relation qu'on vient d'établir peut donc aussi s'écrire

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad -k d_k = S_k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i S_{k-i}.$$

Comme on sait aussi que

$$d_1 = -\operatorname{tr}(A) = -S_1$$

on constate ainsi que la famille

$$(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$$

est une solution du système (Σ).

Comme ce système possède une seule solution, on en déduit enfin que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = a_{n-k}.$$

7. D'après la relation établie au **6.a.** et l'identité précédente,

$$\begin{aligned} B_n &= A^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} A^{n-i} \\ &= A^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_i A^i = P(A) = 0_n. \end{aligned}$$

❧ Par **6.b.**, $d_n = a_0$. La matrice A est donc inversible si, et seulement si, $d_n \neq 0$.
Comme B_n est nulle, on déduit de la construction des matrices B_k que

$$B_n = 0_n = B_{n-1}A + d_n I_n$$

et donc que, si la matrice A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{-1}{d_n} \cdot B_{n-1}.$$

REMARQUE.— Absolument rien de nouveau depuis **5.** : la matrice A^{-1} est un polynôme en A et la matrice B_{n-1} résulte de l'application du schéma de Horner à ce polynôme en A. C'est donc pratique, mais pas magique...

8. a.

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. b.

$$P = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$$

REMARQUE.— Graphiquement, on constate que ce polynôme possède quatre racines réelles distinctes. Nous sommes donc bien dans le cadre posé par le sujet.

Les logiciels de calcul formel consultés ne donnent aucune factorisation du polynôme caractéristique, ce qui signifie qu'on peut tout au plus calculer des valeurs approchées des valeurs propres de A.

On *voit* sur le graphe que P possède une racine entre -2 et $-3/2$, une racine entre $-3/2$ et -1, une racine entre 1 et $3/2$ et une racine entre $5/2$ et 3, on peut calculer des valeurs approchées des valeurs propres de A par dichotomie sur chacun des quatre segments

$$[-2, -3/2], \quad [-3/2, -1], \quad [1, 3/2], \quad [5/2, 3].$$

On trouve : $-1,821$, $-1,286$, $1,160$ et $2,947$ à 10^{-3} près

8. c. On trouve $d_1 = -1$, $d_2 = -7$, $d_3 = 1$, $d_4 = 8$ et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^4 + d_1X^3 + d_2X^2 + d_3X + d_4 = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$$

et
$$A^{-1} = \frac{-1}{8} \cdot B_3.$$

Appliquer cet algorithme à la main ne doit pas être une partie de plaisir (j'avoue que je n'ai pas essayé !), mais il faut reconnaître qu'on obtient ainsi le polynôme caractéristique et l'inverse de A bien plus rapidement qu'avec les techniques habituelles : trois produits matriciels et le tour est joué !

9. a. Pour la première fonction, les arguments A et B sont deux listes de listes. La boucle indexée par k calcule la somme
$$s_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} b_{k,j}.$$
La boucle indexée par j calcule donc la i-ième ligne du produit AB, judicieusement appelée L. Enfin, la boucle indexée par i calcule le produit AB sous la forme d'une liste de listes.

❧ Les arguments de la deuxième fonction sont un réel x et un entier n. Cette fonction crée n listes constituées de 0 et, pour tout $0 \leqslant i < n$, la liste d'indice i se voit affecter la valeur x en i-ème position. La fonction retourne donc la matrice $x.I_n$.

❧ À partir d'une liste de listes A, la troisième fonction calcule la somme
$$S = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,i}$$
et retourne donc la trace de la matrice A.

❧ La quatrième fonction prend pour arguments une liste de listes A et un réel x. Elle crée une liste de listes B dont la i-ème ligne contient les éléments de de la i-ème ligne de A multipliés par x.

Cette fonction retourne donc $x.A$.

❧ La cinquième fonction prend pour arguments deux listes de listes A et B et retourne la liste de listes qui représente la matrice $A + B$.

9. b. Initialement, on donne la matrice A et la valeur $d_0 = 1$ (le polynôme caractéristique est unitaire par convention).

On calcule ensuite d_1 et B_1, puis pour $1 \leqslant k < n$, on calcule (une seule fois !) le produit $B_k A$ pour en déduire d'une part d_{k+1} et d'autre par B_{k+1}.

On affiche l'avant-dernière matrice B calculée, c'est-à-dire $B_{(n-2)+1} = B_{n-1}$ et la liste $(d_0, \ldots, d_n)$.

```
d = [1]
A = [[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n = len(A)
d.append(-fonction3(A))
B = fonction5(A, fonction2(d[-1],n))
for k in range(1,n):
    produit = fonction1(B, A)
    d.append(-fonction3(produit)/(k+1))
    B = fonction5(produit, fonction2(d[-1],n))
    if (k==n-2):
        print(B)
print(d)
```

REMARQUE.— On peut obtenir le même résultat de manière plus agréable avec le module `numpy`.

Les opérations algébriques sur les matrices (addition, multiplication matricielle et multiplication par un scalaire) sont déjà définies par $+$, `dot` et $*$, de même que la trace et la matrice identité (`np.eye(n)`).

Le code devient alors :

```
import numpy as np
d = [1]
A = np.array([[1,0,-1,1],[0,0,0,2],
              [-1,0,-1,0],[1,2,0,1]])
n = len(A)
d.append(-A.trace())
B = A+d[-1]*np.eye(n)
```

```
for k in range(1, n):
    produit = B.dot(A)
    d.append(-produit.trace()/(k+1))
    B = produit + d[-1]*np.eye(n)
    print(B)
print(d)
```

Il est plus commode de représenter A comme un tableau (`array`) que comme une matrice (`matrix`) car la trace d'un tableau est un flottant alors que la trace d'une matrice appartient à $\mathfrak{M}_1(\mathbb{K})$ et devrait être convertie en flottant pour que le code puisse s'effectuer...