Problème de Mathématiques

Référence pp2101 — Version du 6 décembre 2025

On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & -5 \\ -5 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On considère

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a. Que vaut le rang de N ?
1. b. Calculer N^2.
1. c. Donner un vecteur directeur de l'image de N et un vecteur directeur du noyau de N.
1. d. En déduire une matrice inversible $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. e. On pose

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $Q^{-1}B_1Q$ et $Q^{-1}B_2Q$.
2. On considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 0, 0, 1), \qquad u_2 = (0, 1, 1, 0),$$
$$u_3 = (0, 1, -1, 0), \qquad u_4 = (1, 0, 0, -1).$$

2. a. Démontrer que les plans

$$F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad F_2 = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$$

sont supplémentaires dans E et stables par u.
2. b. On pose

$$A_1 = P_1^{-1}A_0P_1.$$

Sans calculs supplémentaires, que peut-on dire de la matrice A_1 ?
2. c. Calculer A_1.
3. a. Il existe une matrice inversible $Q_2 \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$A_2 = Q_2^{-1}A_1Q_2$$

soit triangulaire supérieure.
3. b. En déduire une matrice inversible $P_2 \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$P_2^{-1}A_0P_2$$

soit triangulaire supérieure.
4. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ?
5. Démontrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A_0 sont égaux.
6. Pour $x \in E$, on considère la famille

$$\mathscr{F}_x = \big(x, u(x), u^2(x), u^3(x)\big).$$

6. a. Quand le rang de $\mathscr{F}_x$ est-il nul ?
6. b. Pour quels vecteurs $x \in E$ le rang de $\mathscr{F}_x$ est-il égal à 1 ?
6. c. On choisit $x \in F_1 \cup F_2$. Démontrer que le rang de $\mathscr{F}_x$ est inférieur à 2.
6. d. Donner un exemple de vecteur $x \in E$ pour lequel le rang de $\mathscr{F}_x$ est égal à 3.
6. e. La famille $\mathscr{F}_x$ peut-elle être une base de E ? Si oui, que dire de la matrice de u relative à cette base ?

Solution ❀ Endomorphisme trigonalisable

1. a. L'image de N est engendrée par ses colonnes. Or ses colonnes ne sont pas nulles (rang au moins égal à 1) et proportionnelles (rang au plus égal à 1), donc le rang de N est égal à 1.
1. b. On trouve $N^2 = 0$.
1. c. Comme le rang de N est égal à 1, son image est engendrée par n'importe quelle colonne non nulle de N.
❧ Comme $N^2 = 0$, alors $\operatorname{Im} N \subset \operatorname{Ker} N$. Or, d'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} N = 2 - \dim \operatorname{Im} N = 1 = \dim \operatorname{Im} N,$$

donc $\operatorname{Ker} N = \operatorname{Im} N$.
❧ Par exemple,

$$\operatorname{Ker} N = \operatorname{Im} N = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. d. Analysons la formule qui nous est proposée.
❧ Si Q est inversible, alors ses deux colonnes forment une base (C_1, C_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
L'expression proposée de $Q^{-1}NQ$ nous dit alors que

$$NC_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad NC_2 = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = C_1.$$

Il faut donc choisir pour C_1 un vecteur directeur du noyau et pour C_2 un antécédent de C_1 par N.
❧ D'après **[1.c.]**,

$$N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} N.$$

❧ En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on définit bien une matrice inversible telle que

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. e. Avant de se lancer dans les calculs, il faut remarquer que

$$B_1 = N + I_2 \quad \text{et} \quad B_2 = N - I_2.$$

Par conséquent,

$$Q^{-1}B_1Q = Q^{-1}NQ + Q^{-1}I_2Q = Q^{-1}NQ + I_2$$

et de même

$$Q^{-1}B_2Q = Q^{-1}NQ - I_2.$$

On a donc

$$Q^{-1}B_1Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}B_2Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a. Il est clair que l'équation vectorielle

$$a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 + d \cdot u_4 = (0, 0, 0, 0)$$

admet $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ pour seule solution. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est donc une famille libre de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
❧ Comme les sous-familles (u_1, u_2) et (u_3, u_4) sont libres, les sous-espaces F_1 et F_2 sont bien des plans.
Comme la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, ces deux plans sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
❧ Par produits matriciels,

$$A_0u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_1 - 4 \cdot u_2 \in F_1$$

$$A_0u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 + 3 \cdot u_2 \in F_1$$

ce qui prouve que $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est stable par u et de même

$$A_0u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 \cdot u_3 - 4 \cdot u_4 \in F_2$$

$$A_0u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_3 + u_4 \in F_2$$

donc F_2 est stable par u.

2. b. D'après la formule de changement de base, la matrice A_1 représente u dans la base $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$. Comme les plans F_1 et F_2 sont stables par u, la matrice de u relative à cette base est donc diagonale par blocs.

2. c. Les calculs du **[2.a.]** nous donnent la matrice A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a. On remarque que

$$A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

on définit une matrice inversible (diagonale par blocs, tous les blocs diagonaux inversibles) et

$$Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

D'après **[1.e.]** et les règles du calcul par blocs,

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice triangulaire.

3. b. On pose $P_2 = P_1Q_2$ (inversible en tant que produit de matrices inversibles) pour obtenir

$$P_2^{-1}A_0P_2 = (Q_2^{-1}P_1^{-1})A_0(P_1Q_2) = Q_2^{-1}A_1Q_2 = A_2.$$

REMARQUE.— Le calcul n'est pas demandé, mais

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Comme les matrices A_0 et A_2 sont semblables, la matrice A_0 est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A_2 est diagonalisable.

Comme A_2 est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux (1 et -1). Manifestement, les sous-espaces propres sont tous les deux de dimension 1 :

$$\mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}(A + I_4) = 3$$

et comme $1 + 1 < 4$, les matrices A_2 et A_0 ne sont pas diagonalisables.

5. Les matrices A_0 et A_2 sont semblables, donc leurs polynômes caractéristiques et leurs polynômes minimaux sont égaux.

❧ Comme A_2 est triangulaire, son polynôme caractéristique est égal à

$$(X-1)^2(X+1)^2.$$

❧ Comme le polynôme minimal est un diviseur du polynôme caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton), que ces deux polynômes sont unitaires et qu'ils ont les mêmes racines, il reste quatre possibilités pour le polynôme minimal.

$$(X-1)(X+1) \qquad (X-1)^2(X+1)$$
$$(X-1)(X+1)^2 \qquad (X-1)^2(X+1)^2$$

❧ Comme la matrice A_2 n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples, ce qui exclut $(X-1)(X+1)$.

❧ On vérifie facilement (calcul par blocs) que

$$(A_2-I_4)^2(A_2+I_4) \neq 0 \quad \text{et} \quad (A_2-I_4)(A_2+I_4)^2 \neq 0.$$

Par conséquent, le polynôme minimal est égal à

$$(X-1)^2(X+1)^2,$$

c'est-à-dire égal au polynôme caractéristique.

6. a. Si le rang de la famille $\mathscr{F}_x$ est nul, alors les quatre vecteurs sont nuls, donc en particulier $x = 0_E$.

Réciproquement, par linéarité de u, si $x = 0_E$, alors $\mathscr{F}_x$ est constituée de quatre vecteurs nuls, donc son rang est nul.

Le rang de $\mathscr{F}_x$ est nul si, et seulement si, $x = 0_E$.

6. b. D'après la question précédente, si le rang de $\mathscr{F}_x$ est égal à 1, alors $x \neq 0_E$ et par conséquent les trois vecteurs $u(x)$, $u^2(x)$ et $u^3(x)$ sont proportionnels à x. En particulier, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x.$$

Comme $x \neq 0_E$, alors c'est un valeur propre de u et $\lambda = \pm 1$.

Réciproquement, si x est un vecteur propre associé à $\lambda = \pm 1$, alors $x \neq 0_E$ (définition des vecteurs propres !) et

$$\mathscr{F}_x = (x, \pm x, x, \pm x)$$

donc $\operatorname{rg} \mathscr{F}_x = 1$.

Le rang de $\mathscr{F}_x$ est égal à 1 si, et seulement si, x est un vecteur propre de u.

6. c. Choisissons $x \in F_1$. Comme F_1 est stable par u, on sait que $u(x) \in F_1$ et *a fortiori* $u^2(x)$ et $u^3(x)$ appartiennent à F_1. Dans ce cas,

$$\operatorname{rg} \mathscr{F}_x \leqslant \dim F_1 = 2.$$

Il en va évidemment de même avec F_2.

6. d. Notons ε_1, ε_2, ε_3 et ε_4, les vecteurs de E représentés par les colonnes de la matrice P_2.

D'après **[3.b.]**, les vecteurs ε_1 et ε_3 sont des vecteurs propres associés à 1 et à -1 respectivement, cependant que

$$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad u(\varepsilon_4) = \varepsilon_3 - \varepsilon_4.$$

Posons $x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Le sous-espace

$$\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = F_1 + \mathbb{R} \cdot \varepsilon_3$$

est un espace de dimension 3 (car la famille des ε_k est libre), stable par u (en tant que somme de sous-espaces vectoriels stables par u). Comme il contient x, il contient aussi $\mathscr{F}_x$ et par conséquent, $\operatorname{rg} \mathscr{F}_x \leqslant 3$. Mais

$$u(x) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 \quad \text{et} \quad u^2(x) = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

et par quelques opérations de pivot bien placées, on remarque que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre.

Donc $\operatorname{rg} \mathscr{F}_x = 3$.

6. e. Posons maintenant

$$x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = (7, 7, 3, -3).$$

On trouve :

$$u(x) = 2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$
$$u^2(x) = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$
$$u^3(x) = 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

On peut alors vérifier que le rang de la matrice

$$\mathfrak{Mat}_{(\varepsilon_k)}\big(x, u(x), u^2(x), u^3(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 4, ce qui prouve que la famille $\mathscr{F}_x$ est libre : c'est donc bien une base de E.

❧ D'après **[5.]**, le polynôme minimal de u est égal à

$$(X-1)^2(X+1)^2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$$

donc

$$u^4 - 2u^2 + I_E = \omega_E$$

et en particulier

$$u^4(x) = 2u^2(x) - x.$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{F}_x}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On aura reconnu une matrice compagnon.