Problème de Mathématiques

Référence pp2102 — Version du 6 décembre 2025

On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 15 & -8 \\ -9 & 7 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -2 & 0 \\ 8 & -2 & -14 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.

1. a. Démontrer que la droite

$$D = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1, 1)$$

est stable par u.

1. b. Vérifier que la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de ${}^tA_0$. En déduire que l'hyperplan

$$H = [x + 4y - 7z + 3t = 0]$$

est stable par u.

1. c. Vérifier que $E = D \oplus H$.

2. Démontrer, *avec un minimum de calculs,* que la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

3. On pose

$$A_1 = P_1^{-1} A_0 P_1$$

et on **admet** que

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ * & -2 & 0 & a \\ * & 1 & 1 & b \\ * & 5 & 6 & * \end{pmatrix}.$$

3. a. On peut déterminer presque sans calculs les coefficients masqués par $*$. Comment ?

3. b. Déterminer les coefficients a et b (par le calcul).

4. On pose

$$N = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. a. Calculer le rang de N.

4. b. Calculer N^2, puis N^3.

5. On **suppose** qu'il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1} N Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. a. Cette hypothèse est-elle compatible avec les résultats de la question précédente ?

5. b. Quelles relations entre les colonnes de Q peut-on déduire de cette hypothèse ?

5. c. Donner une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire une matrice inversible P_2 telle que

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A_0.

Solution ❀ Endomorphisme trigonalisable

1. a. Calculons dans la base canonique. Comme

$$A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in D,$$

la droite D est bien stable par u.

1. b. On a bien

$$^t A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La valeur propre associée est donc -1.

❧ D'après l'équation de l'hyperplan, le vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à H *si, et seulement si,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

❧ Considérons donc un vecteur $v = (x, y, z, t) \in H$: ce vecteur vérifie (2). Il faut vérifier que son image $A_0 v$ est encore dans H, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

En transposant cette équation, cela revient à montrer que

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot {}^t A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

mais d'après (1) cela équivaut à

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

ce qui est vrai par hypothèse (2).

1. c. On *sait* qu'une droite (telle que D) et un hyperplan (tel que H) sont supplémentaires si, et seulement si, un vecteur directeur de D n'appartient pas à H.

Comme le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ (qui dirige D) ne vérifie pas l'équation de H (et n'appartient donc pas à H), on a bien

$$E = D \oplus H.$$

2. Nous allons interpréter la matrice P_1 comme une matrice de passage (la suite de l'énoncé nous y encourage).

La première colonne de P_1 est un vecteur directeur (= une base) de D.

On s'assure rapidement que les trois autres colonnes appartiennent toutes à l'hyperplan H.

Il suffit de vérifier que ces trois colonnes sont linéairement indépendantes : elles constitueraient alors une base de H et comme D et H sont supplémentaires dans E, cela prouveraient que P_1 est la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à $D \oplus H$ et donc que P_1 serait inversible.

Avec $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les première et troisième colonnes sont linéairement indépendantes (elles ne sont pas proportionnelles) et que la deuxième colonne n'est pas engendrée par les deux autres (à cause du premier coefficient, non nul).

Cela prouve que les trois dernières colonnes de P_1 sont linéairement indépendantes et donc que, comme on l'a expliqué, la matrice P_1 est inversible.

3. a. D'après la formule du changement de base, la matrice A_1 représente u dans une base adaptée à $D \oplus H$ (précisément la base qu'on vient de définir). Comme D et H sont stables par u, on sait déjà que

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & 6 & * \end{pmatrix}.$$

D'après **[1.a.]**, le premier vecteur de cette base est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -1, donc la première colonne de A_1 est

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A_1 et A_0 sont semblables (elles représentent le même endomorphisme u dans deux bases différentes), donc elles ont même trace. Par conséquent,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. b. La quatrième colonne de A_1 décrit l'image de la quatrième colonne de P_1 par la matrice A_0 :

$$A_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $a = -3$ et $b = 1$, si bien que

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. a. Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de N est au moins égal à 2.

Les deux premières lignes sont proportionnelles, donc le rang de N est au plus égal à 2.

Le rang de N est donc égal à 2.

4. b. On trouve

$$N^2 = \begin{pmatrix} -6 & -18 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0_3$.

5. a. Deux matrices semblables ont même rang ✔ et même trace ✔.

Si deux matrices sont semblables, alors leurs puissances sont semblables et ont donc même rang ✔ et même trace ✔ (pour les exposants 2 et 3).

Notre affaire n'a pas l'air trop mal partie...

5. b. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de Q. D'après la formule de changement de base, la matrice $Q^{-1}NQ$ représente le même endomorphisme que N mais dans une base différente et, plus précisément,

$$NC_1 = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 \qquad \text{(première colonne)}$$
$$NC_2 = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 \qquad \text{(deuxième colonne)}$$
$$NC_3 = 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 \qquad \text{(troisième colonne)}$$

et donc
$$C_2 = NC_3, \qquad C_1 = N^2C_3.$$
Il s'agit donc essentiellement de choisir C_3...

Comme $C_1 = N^2C_3 \neq 0$ (vecteur de base !), il s'agit d'un vecteur non nul de $\operatorname{Im} N^2$. Or le rang de N^2 est égal à 1 **[4.b.]**, donc le choix est assez limité !

5. c. Le calcul de N^2 nous incite à choisir
$$C_3 = E_1, \quad C_2 = NE_1, \quad C_1 = N^2E_1.$$
Autrement dit, les colonnes de Q sont les premières colonnes de N^2, de N et de I_3 :
$$Q = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$
On peut vérifier très rapidement que cette matrice est bien inversible. Le choix des colonnes prouve, sans calcul supplémentaire, que
$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. D'après **[3.a.]** et **[3.b.]**,
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & I_3 + N \end{pmatrix}.$$
Comme la matrice Q est inversible, la matrice
$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & Q \end{pmatrix}$$
est inversible (diagonale par blocs avec des blocs diagonaux inversibles) et
$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,3} \\ 0_{3,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$
D'après les règles du calcul matriciel par blocs,
$$\begin{aligned} P_2^{-1}A_1P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}(I_3 + N)Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_3 + Q^{-1}NQ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
REMARQUE.— Le déterminant de A_0 est donc égal à -1.

7. D'après la question précédente, les matrices A_0 et A_2 sont semblables :
$$A_2 = P_2^{-1}(P_1^{-1}A_0P_1)P_2 = (P_1P_2)^{-1}A_0(P_1P_2).$$
Elles ont donc le même polynôme minimal et le même polynôme caractéristique.

❧ Comme A_2 est triangulaire, son polynôme caractéristique peut être calculé d'un coup d'œil :
$$(X+1)(X-1)^3 = X^4 - 2X^3 + 2X - 1.$$
❧ Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont exactement les mêmes racines et sont tous les deux unitaires. De plus, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Il y a donc trois candidats, et seulement trois, pour le polynôme minimal :
$$(X+1)(X-1) \qquad (X+1)(X-1)^2 \qquad (X+1)(X-1)^3$$

On vérifie sans trop de fatigue (calculs par blocs !) que

$$A_2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 - I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_2 - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A_2 - I_4)^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous montre clairement que

$$(A_2 + I_4)(A_2 - I_4) \neq 0_4 \quad \text{et} \quad (A_2 + I_4)(A_2 - I_4)^2 \neq 0_4.$$

Le polynôme minimal de A_2, et donc celui de A_0, est par conséquent égal à

$$(X+1)(X-1)^3.$$