Problème de Mathématiques

Référence pp2107 — Version du 6 décembre 2025

On suppose connue une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relative à $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. a. Quel est le rang de A ?

1. b. Expliciter une base de $\operatorname{Ker} A$.

1. c. Calculer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} A$.

1. d. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans E ?

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On considère une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle f est représenté par la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on suppose que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Identifier la matrice P et calculer P^{-1}.

Solution ❀ Réduction d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. a. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est supérieur à 2. Par ailleurs, on peut remarquer que

$$C_3 = C_1 - C_2 \tag{1}$$

donc le rang de A est inférieur à 2. Le rang de A est donc égal à 2.
1. b. D'après le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} A$ est égale à 1 et la relation de liaison (1) signifie que le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient au noyau de f. Donc

$$\operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. c. L'image de A est le sous-espace engendré par les colonnes de A. Comme le rang de A est égal à 2 et que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles,

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le vecteur $x \cdot e_1 + y \cdot y_2 + z \cdot e_3$ appartient donc à $\operatorname{Im} f$ si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par la troisième colonne, on en déduit que

$$\operatorname{Im} A = [x + z = 0].$$

Variante.— Le vecteur (x, y, z) appartient à $\operatorname{Im} f$ si, et seulement si, il existe deux scalaires α et β tels que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si le système

$$\begin{cases} a - b = x \\ -2a + b = y \\ -a + b = z \end{cases}$$

admet au moins une solution. En effectuant les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} a - b = x \\ - b = 2x + y \\ 0 = x + z \end{cases}$$

(équivalent au système précédent). Il est clair que le sous-système constitué des deux premières équations admet une (et une seule!) solution. Par conséquent, le système global admet une solution si, et seulement si, la contrainte $[x + z = 0]$ est satisfaite.
Autre variante.— En calculant le produit vectoriel des deux vecteurs de base de $\operatorname{Im} f$, on obtient un vecteur orthogonal au plan $\operatorname{Im} f$, ce qui nous donne une équation cartésienne du plan.
1. d. D'après le Théorème du rang, on a bien

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$$

mais ne concluons pas trop vite!

La droite $\operatorname{Ker} f$ est dirigée par le vecteur $(1, -1, -1)$, qui vérifie l'équation cartésienne $[x + z = 0]$ qui caractérise $\operatorname{Im} f$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$$

et les deux sous-espaces vectoriels ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. On vérifie que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre, d'après la question précédente, que $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$. Par conséquent, A^3 est la matrice nulle et donc :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad A^n = 0.$$

3. Procédons par analyse et synthèse.

ANALYSE.— Il existe une base $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est égale à A', **si, et seulement si,**

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = f^2(\varepsilon_1) = \varepsilon_3, \quad f(\varepsilon_3) = f^3(\varepsilon_1) = 0.$$

SYNTHÈSE.— Prenons $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(e_1)$ et $\varepsilon_3 = f^2(\varepsilon_1)$. D'après les matrices A et A^2,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on voit facilement que le rang de cette matrice est égal à 3. Cette famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc une base de E et il est clair (d'après ce qui précède) que la matrice de f dans cette base est bien égale à A'.

❧ Un calcul classique montre que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(On peut par exemple remarquer que $e_1 = \varepsilon_1$, puis que $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ et en déduire que $e_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3$: la matrice P^{-1} est aussi la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.)

REMARQUE.— Est-il possible de trouver une autre matrice P que celle qui précède ?

La troisième colonne de P appartient au noyau de A, *il faut donc* que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & -1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

La deuxième colonne est un antécédent de la troisième et la matrice A^2 nous dit quels sont les antécédents possibles :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists\, t \in \mathbb{R}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(la première colonne de A est une solution particulière et la solution générale est la somme de cette solution particulière et des colonnes qui appartiennent au noyau de A). Le seul paramètre possible est donc $t = 0$ et *il faut* que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & -2 & -1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la première colonne de P est un antécédent de la deuxième et la matrice A nous dit quels sont les antécédents possibles :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists\, t \in \mathbb{R}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(même raisonnement fondé sur le principe de superposition). Le seul paramètre possible est encore $t = 0$ et la matrice P que nous avons trouvée est bien *la seule possible*.