

## DS2 - BASSIN DE TRACTION DU LHEEA

### 1. PRESENTATION

Le système étudié, nommé bassin de traction, est utilisé par le Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA) situé à Nantes.

Ce bassin de traction mesure 140 m de long, 5 m de large et a une profondeur constante de 3 m. Il est équipé d'un chariot de traction de maquettes de bateaux pouvant se déplacer dans l'une ou l'autre des directions, avec des vitesses atteignant jusqu'à  $8 \text{ m.s}^{-1}$ . A une extrémité du bassin se trouve un batteur de houle permettant de générer des houles unidirectionnelles régulières de hauteur crête-à-croix maximale de 0,5 m. A son autre extrémité, une plage d'amortissement sert à faire déferler les vagues pour limiter leur réflexion dans le bassin.

### 2. ETUDE DE L'EXIGENCE 1.1.1 : « DUREE DE L'ESSAI »

**Objectif :** Choisir un matériau pour la bande de roulement de chaque roue en contact avec le rail, afin de permettre des mesures correctes pendant une durée de mesure  $t_{acq}$  donnée.

#### 2.1 - Détermination de l'accélération minimale

**Question 1** A partir de la Figure 4, donner l'expression littérale du temps  $T_1$  nécessaire pour avoir  $t_{acq} = 10 \text{ s}$ . En déduire l'expression littérale de l'accélération  $\gamma$  de la première phase en fonction de  $V_m$ ,  $t_{acq}$ ,  $X_0$ ,  $X_f$ . Faire l'application numérique.

- Expression  $T_1$

L'aire sous le profil de vitesse  $V_3(t) = f(t)$  Figure 4 correspond à la distance parcourue par le chariot au cours des 3 phases. Ainsi :  $X_f - X_0 = V_m \cdot (t_{acq} + T_1)$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{X_f - X_0}{V_m} - t_{acq}$$

- Expression  $\gamma$

Le mouvement uniformément accéléré du chariot en phase 1 implique :

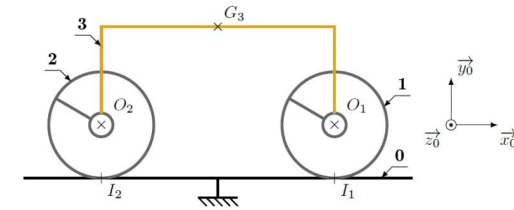
$$V_3(t) = \gamma \cdot t \Rightarrow \gamma = \frac{V_m}{T_1} \text{ pour } t = T_1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{V_m^2}{X_f - X_0 - V_m \cdot t_{acq}}$$

- Applications numériques

A partir des expressions littérales précédentes :  $T_1 = 5 \text{ s}$  et  $\gamma = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$

### 2.2 - Dimensionnement de la motorisation



**Question 2** Exprimer  $V_3$  en fonction de  $\omega_R$ . Déterminer l'énergie cinétique  $E_c(\Sigma/0)$  de l'ensemble isolé par rapport à (0) (on écrira le résultat en fonction de  $V_3$ ). En déduire la masse équivalente  $M_{eq}$ , ramenée sur (3), de l'ensemble isolé, telle que  $E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \cdot M_{eq} \cdot V_3^2$

Remarques sur le sujet : on est surpris de la non prise en compte des 2 roues libres (sans doute masses et inerties moindres-voir Q23) et on suppose que  $m_3$  correspond à la moitié de la masse de la plateforme (3).

- Expression  $V_3$

Le mouvement de translation rectiligne de 3/0 implique :  $\overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 3/0}} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0}$

Le point  $O_1$  est le centre de la liaison pivot entre (1) et (3) donc :  $\overrightarrow{V_{O_1 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0}$

Par application du champs des moments :  $\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{I_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{O_1 I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - R \cdot \gamma_0 \wedge \overrightarrow{\omega_R} \cdot \overrightarrow{z_0}$

$$\text{Projection sur } \overrightarrow{x_0} \Rightarrow V_3 = -R \cdot \omega_R$$

roulement sans glissement au point  $I_1$  entre 1 et 0

- Expression  $E_c(\Sigma/0)$

Par discrétisation :  $E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0) = 2 \cdot E_c(1/0) + E_c(3/0)$  car les masses/inerties des motoréducteurs sont négligées et les 2 roues motrices sont identiques avec les mêmes mouvements/(0). Par définition :

$$E_c(3/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2 \text{ car (3) est en translation rectiligne par rapport à (0)}$$

$$E_c(1/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot (\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}})^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R \cdot (\overrightarrow{\Omega_{1/0}})^2 = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R \cdot \omega_R^2 = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R \cdot \left(-\frac{V_3}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \cdot \left(m_3 + 2 \cdot m_R + \frac{2J_R}{R^2}\right) \cdot V_3^2$$

- Expression  $M_{eq}$

Par identification, nous obtenons :

$$M_{eq} = m_3 + 2 \cdot m_R + \frac{2J_R}{R^2}$$

**Question 3** Lister l'ensemble des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures et donner leur expression en fonction de  $V_3$  et des paramètres du modèle. Reproduire la démarche avec la puissance des actions mécaniques intérieures.

Remarque : L'énoncé semble accepter les formes vectorielles et composantes des torseurs.

- Puissances des Actions Mécaniques (A.M.) extérieures

Actions mécaniques extérieures à $\Sigma$	Puissances galiléennes des A.M. extérieures : $P_{\Sigma \rightarrow \Sigma/0}$
Gravités	$P_{g \rightarrow 1/0} = P_{g \rightarrow 2/0} = P_{g \rightarrow 3/0} = 0$ car les 3 poids ne travaillent pas
Contacts ponctuels sol → roues	$P_{0 \rightarrow 1/0} = P_{0 \rightarrow 2/0} = 0$ car roulements sans glissement en $I_1$ et $I_2$ Par le calcul : $P_{0 \rightarrow 1/0} = \left\{ \begin{matrix} \omega_R \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_1} \otimes \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_1} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\Sigma \rightarrow \Sigma/0} = 0}$$

- Puissances des A.M. intérieures

Actions mécaniques intérieures à $\Sigma$	Puissances galiléennes des A.M. intérieures : $P_{int}(\Sigma)$
Actions liées aux 2 liaisons pivots en $O_1$ et $O_2$ et toutes les liaisons mécaniques au sein des moteurs et réducteurs	$P_{int} = 0$ car toutes ces liaisons sont supposées parfaites (les rendements sont unitaires)
Stators sur Rotors	$P_{stator3 \leftarrow rotor1} = P_{stator3 \leftarrow rotor2} = C_m \cdot \omega_m = -C_m \cdot \frac{V_3}{k.R}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{int}(\Sigma) = -2 \cdot C_m \cdot \frac{V_3}{k.R}}$$

**Question 4** Appliquer le Théorème de l'Energie Cinétique (Energie Puissance) pour déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  au niveau de chaque moteur permettant d'assurer l'accélération  $\gamma$  nécessaire.

Le Théorème de l'Energie Cinétique s'exprime :  $P_{\Sigma \rightarrow \Sigma/R_0} + P_{int}(\Sigma) = \frac{d(E_c(\Sigma/0))}{dt}$

A partir des résultats précédents on en déduit :  $-2 \cdot C_m \cdot \frac{V_3}{k.R} = M_{eq} \cdot \gamma \cdot V_3$

$$\Rightarrow \boxed{C_m = -\frac{M_{eq} \cdot k.R \cdot \gamma}{2}}$$

## 2.3 - Détermination du facteur de frottement minimal

**Question 5** Donner l'expression du moment dynamique de la roue avant (1) au point  $O_1$  dans son mouvement par rapport au sol (0) en fonction de  $\frac{d\omega_R(t)}{dt}$ . Réaliser l'inventaire des actions mécaniques extérieures agissant sur (1) (donner l'expression de chaque torseur)

- Expression  $\vec{\delta}_{01,1/0}$

Par définition :  $\vec{\delta}_{01,1/0} = m_R \cdot \vec{v}_{01/0} \wedge \vec{v}_{01,1/0} + \left[ \frac{d(\vec{\sigma}_{01,1/R_0})}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d(I_R \omega_R \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\delta}_{01,1/0} = J_R \cdot \frac{d\omega_R(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0}$$

- BAME ext → (1) en mode plan ( $O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0$ )

<b>(3) sur (1) Pivot en <math>O_1</math></b>	$\{T_{3 \rightarrow 1}\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} X_{31} \cdot \vec{x}_0 + Y_{31} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$
<b>Réducteur sur (1)</b>	$\{T_{red1 \rightarrow 1}\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}$
<b>Sol (0) sur (1) Ponctuelle non parfaite</b>	$\{T_{0 \rightarrow 1}\}_{I_1} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0 \\ R \cdot X_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_1}$
<b>Gravité sur (1)</b>	$\{T_{g \rightarrow 1}\}_{O_1} = \left\{ \begin{matrix} -m_R \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_1}$

**Question 6** On isole la roue avant (1). Ecrire le théorème du moment dynamique appliqué à la roue (1) au point  $O_1$  projeté sur  $\vec{z}_0$ , puis en déduire l'expression littérale de la composante  $x_{01}$  (de l'action du sol (0) sur la roue (1)) en fonction uniquement de l'accélération  $\gamma$  et des masses. Donner alors, sans faire le calcul, l'expression de la composante  $x_{02}$  de l'action du sol (0) sur la roue (2).

- Expression  $x_{01}$

Le Théorème du Moment Dynamique (TMD) au point  $O_1$  projeté sur  $\vec{z}_0$  donne :  $(\vec{\delta}_{01,1/0}) \cdot \vec{z}_0 = (\Sigma \vec{M}_{O_1, ext \rightarrow 1}) \cdot \vec{z}_0$  (a)

$$Q5 \text{ et (a)} \rightarrow J_R \cdot \frac{d\omega_R(t)}{dt} = C_R + R \cdot X_{01}$$

$$\text{Enoncé} \rightarrow C_m = k \cdot C_r$$

$$Q4 \rightarrow C_m = -\frac{M_{eq} \cdot k \cdot R \cdot \gamma}{2}$$

$$Q2 \rightarrow V_3 = -R \cdot \omega_R \Rightarrow \frac{d\omega_R(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{R} \text{ et } M_{eq} = m_3 + 2 \cdot m_R + \frac{2 \cdot J_R}{R^2}$$

$$\Rightarrow X_{01} = -\frac{J_R \cdot \gamma}{R} - \frac{C_m}{k} = -\frac{J_R \cdot \gamma}{R} + \frac{M_{eq} \cdot R \cdot \gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{01} = \frac{m_3 + 2 \cdot m_R}{2} \cdot \gamma}$$

- Expression  $x_{02}$

Le même raisonnement appliqué au solide (2) conduira à :  $(\vec{\delta}_{02,2/0}) \cdot \vec{z}_0 = (\Sigma \vec{M}_{O_2, ext \rightarrow 2}) \cdot \vec{z}_0$

$$\Rightarrow \boxed{X_{02} = \frac{m_3 + 2 \cdot m_R}{2} \cdot \gamma}$$

**Question 7** On isole l'ensemble ( $\Sigma$ ). Proposer le théorème utilisé (T.R.D. ou T.M.D., la projection, éventuellement le point) permettant de déterminer la composante  $y_{01}$ . Donner l'expression de la composante du torseur dynamique correspondant en fonction de  $\gamma$ , des différentes masses et/ou inerties ainsi que des grandeurs géométriques.

- Expression  $y_{01}$

$y_{01}$  s'obtient par la projection sur  $\vec{z}_0$  du T.M.D. au point  $I_2$  :  $(\vec{\delta}_{I_2, \Sigma/0}) \cdot \vec{z}_0 = (\Sigma \vec{M}_{I_2, ext \rightarrow \Sigma}) \cdot \vec{z}_0$  (solution possible en  $O_2$  mais en  $I_2$  on s'affranchit de  $x_{01}$  et  $x_{02}$  déterminés préalablement)

- Expression  $\vec{\delta}_{I_2, \Sigma/0}$

Par discrétisation :  $\vec{\delta}_{I_2, \Sigma/0} = \vec{\delta}_{I_2, 1/0} + \vec{\delta}_{I_2, 2/0} + \vec{\delta}_{I_2, 3/0}$

$$\vec{\delta}_{I_2, 2/0} = \vec{\delta}_{O_2, 2/0} + \overrightarrow{I_2 O_2} \wedge m_R \cdot \gamma \cdot \vec{x}_0 = \left[ \frac{d(\vec{\sigma}_{O_2, 2/0})}{dt} \right]_{R_0} - m_R \cdot R \cdot \gamma \cdot \vec{z}_0 = \left( -\frac{\gamma}{R} \cdot J_R - m_R \cdot R \cdot \gamma \right) \cdot \vec{z}_0 = -\gamma \cdot \left( \frac{J_R}{R} + m_R \cdot R \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{I_2, 1/0} = \vec{\delta}_{O_1, 1/0} + \overrightarrow{I_2 O_1} \wedge m_R \cdot \gamma \cdot \vec{x}_0 = -\gamma \cdot \left( \frac{J_R}{R} + m_R \cdot R \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{12,3/0} = \vec{\delta}_{G_3,3/0} + (\vec{I}_2 \vec{G}_3 \wedge \vec{R} \vec{d}_{3/0}) = -m_3 \cdot (H + R) \cdot \gamma \cdot \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{12,5/0} = -\left(\frac{2J_R}{R} + 2 \cdot m_R \cdot R + m_3 \cdot (H + R)\right) \cdot \gamma \cdot \vec{z}_0$$

**Question 8** Proposer uniquement la démarche (isolement(s), inventaire des actions mécaniques, théorème(s) utilisé(s) permettant ensuite de déterminer la composante  $Y_{02}$  de l'action du sol(0) sur la roue (1)

- On isole  $\Sigma$
- BAME : 3 poids, 2 actions du sol (0) sur les roues en  $I_1$  et  $I_2$
- Résolution : Théorème de la Résultante Dynamique (statique convient ici aussi) projeté sur  $\vec{y}_0$

**Question 9** Dans un premier temps, en se basant sur les lois de Coulomb, indiquer la démarche qui a été mise en œuvre pour déterminer les valeurs minimales de  $f_1$  et  $f_2$ .

Les lois de Coulomb stipulent à la limite du glissement :

$$f_1 = \frac{|X_{01}|}{|Y_{01}|} \text{ et } f_2 = \frac{|X_{02}|}{|Y_{02}|}$$

Les applications numériques sur les résultats des trois dernières questions conduiront aux valeurs de  $X_{01}, X_{02}, Y_{01}, Y_{02}$  et donc aux valeurs de  $f_1$  et  $f_2$

Remarque :  $X_{01} = X_{02}$  et  $Y_{02} > Y_{01}$  (suite accélération)  $\rightarrow f_2 < f_1$  (on retrouve bien les données de l'énoncé)

**Question 10** A partir des indications fournies, proposer une valeur du facteur de frottement à retenir et justifier. Enfin, à partir du Tableau 1 ci-dessous, proposer un choix de bandage (matériau de chaque roue) qui permette d'éviter le glissement en phase d'accélération, pour ainsi respecter l'exigence 1.1.1.

Dans la phase 1 d'accélération, la valeur  $f_1 = 0,177$  est la plus défavorable.

En prenant en compte les 2 indications suivantes :

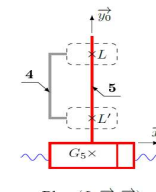
- Le coefficient de sécurité est égal à 2,
  - les roues libres réduisent de moitié les composantes normales au sol sur les roues motrices,
- alors le facteur de frottement sec minimal vaut :  $0,177 \times 2 \times 2 = 0,708$

Conclusion : le bandage des roues motrices doit être en caoutchouc car  $f_{\text{acier/caoutchouc}} \in [1,4] > 0,708$

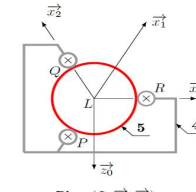
### 3. ETUDE DE L'EXIGENCE 3 : « ACQUERIR LES DONNEES »

**Objectif :** Déterminer l'ensemble des composantes du torseur des actions mécaniques de l'eau agissant sur la maquette en déplacement à vitesse stabilisée.

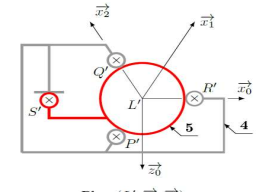
#### 3.2 - Etude de la liaison entre l'ensemble (5) et le solide (4)



Plan  $(L, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$   
Figure 8a



Plan  $(L, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$   
Figure 8b



Plan  $(L', \vec{x}_0, \vec{z}_0)$   
Figure 8c

Figure 8 : Modélisation de la liaison entre (4) et (5)

**Question 11** Préciser votre démarche puis donner l'écriture simplifiée du torseur  $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\}$  au point L puis donner le nom et la (les) caractéristique(s) géométrique(s) de cette liaison. Donner également l'écriture simplifiée du torseur  $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\}$  au point L'. Les torseurs seront exprimés dans la base  $b_0$ .

- Ecriture  $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\}$

Les torseurs d'actions mécaniques des 3 liaisons en P, Q et R conservent la même forme, ramenés au point L.

$$\text{D'où : } \{T_{4 \rightarrow 5}^P\} = \begin{Bmatrix} X_{45}^P & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{45}^P & 0 \end{Bmatrix}_{b_0} \quad \{T_{4 \rightarrow 5}^Q\} = \begin{Bmatrix} X_{45}^Q & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{45}^Q & 0 \end{Bmatrix}_{b_0} \quad \{T_{4 \rightarrow 5}^R\} = \begin{Bmatrix} X_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$$

Ces 3 liaisons étant en parallèles, le torseurs équivalent  $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\} = \{T_{4 \rightarrow 5}^P\} + \{T_{4 \rightarrow 5}^Q\} + \{T_{4 \rightarrow 5}^R\}$  exprimés en L

$$\Rightarrow \{T_{4 \rightarrow 5}^1\} = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0} : \text{Liaison linéaire annulaire d'axe } (L, \vec{y}_0)$$

- Ecriture  $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\}$

Avec la même méthode, en ajoutant la liaison ponctuelle de normale  $(S', \vec{z}_0)$  qui interdit la rotation selon  $\vec{y}_0$ .

$$\Rightarrow \{T_{4 \rightarrow 5}^2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & M_2 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$$

**Question 12** Donner l'écriture simplifiée de  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$ , torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente entre (4) et (5) en L (également exprimé dans la base  $b_0$ ). Donner le nom et la (les) caractéristique(s) géométrique(s) de cette liaison. Expliquer pourquoi le concepteur a choisi une telle liaison plutôt qu'une liaison encastrement entre l'ensemble (5) et le solide (4).

- Ecriture  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$

Les 2 liaisons équivalentes déterminées à la question précédente sont en parallèle.

La liaison équivalente 1 ( $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\}$ ) autorise au point L les ddl :  $T_y, R_x, R_y, R_z$ .

La liaison équivalente 2 ( $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\}$ ) interdit au point L :  $R_x, R_y$  et  $R_z$ .

Seule la translation selon  $\vec{y}_0$  est possible

$$\Rightarrow \{T_{4 \rightarrow 5}\} \text{ est de la forme } \begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ 0 & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{b_0} : \text{Liaison glissière d'axe } (L, \vec{y}_0)$$

- Justificatif de cette liaison

Le concepteur laisse libre le déplacement de (5) par rapport à (4) selon  $\vec{y}_0$  afin que la poussée d'Archimède opère librement. Une liaison encastrement perturberait le niveau de flottaison naturel et donc les mesures dans les barres Bi.

### 3.3 - Réglage de la ligne de flottaison

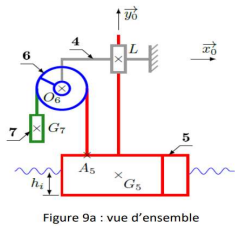


Figure 9a : vue d'ensemble

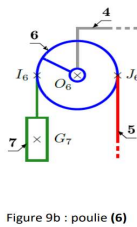


Figure 9b : poulie (6)

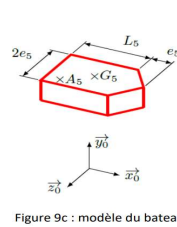


Figure 9c : modèle du bateau

**Question 13** En appliquant le Principe Fondamental de la Statique à l'ensemble {6+7}, exprimer  $F_{56}$  en fonction de  $m_7$ ,  $g$  et des paramètres géométriques nécessaires. Préciser la ou les équations utilisées.

- On isole {6+7+portion câble entre 7 et J6}
- BAME en mode statique plan ( $L, \vec{x}_0, \vec{y}_0$ )
  - gravité sur 6 et sur 7
  - $\{T_{4 \rightarrow 6}\}$  lié à la liaison pivot 6/4
  - $\{T_{5 \rightarrow 6}\}$  donné par l'énoncé
- Résolution : Le théorème du moment statique en  $O_6$  projeté sur  $\vec{z}_0$  donne :  
 $R.m_7.g + R.F_{56} = 0$

$$\Rightarrow F_{56} = -m_7 \cdot g$$

**Question 14** Exprimer le torseur modélisant l'action de la poussée d'Archimède sur la maquette  $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$  au point  $G_5$ , en fonction de  $L_5$ ,  $e_5$ ,  $h_i$ ,  $\rho$  et  $g$ . En appliquant le Principe Fondamental de la Statique à (5), en déduire la hauteur de maquette immergée  $h_i$  en fonction de  $m_5$ ,  $m_7$ ,  $\rho$ ,  $L_5$ ,  $e_5$ .

- Expression  $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$

Le poids du volume d'eau déplacé vaut :  $\rho \cdot g \cdot h_i \cdot (2 \cdot e_5 \cdot L_5 + e_5^2)$ . La poussée d'Archimède conduit à :

$$\{T_{eau \rightarrow 5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \cdot g \cdot h_i \cdot (2 \cdot e_5 \cdot L_5 + e_5^2) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Expression  $h_i$

- On isole {5}
- BAME en mode statique plan ( $L, \vec{x}_0, \vec{y}_0$ )
  - gravité  $\{T_{g \rightarrow 5}\}$ , poussée d'archimède  $\{T_{eau \rightarrow 5}\}$ , câble  $\{T_{6 \rightarrow 5}\}$
- Résolution : Le Théorème de la Résultante Statique projeté sur  $\vec{y}_0$  associé au théorème des actions réciproque donnent :  
 $\rho \cdot g \cdot h_i \cdot (2 \cdot e_5 \cdot L_5 + e_5^2) + m_7 \cdot g - m_5 \cdot g = 0$

$$\Rightarrow h_i = \frac{m_5 - m_7}{\rho \cdot e_5 \cdot (2 \cdot L_5 + e_5)}$$

**Question 15** Montrer que ce dispositif permet à lui seul de satisfaire les exigences 3.2.1 et 3.2.2. L'emplacement du point d'ancrage du câble du contrepoids sur la maquette a-t-il une influence sur la hauteur immergée ?

«requirement» Ligne de flottaison Id = "3.2.1" Text = "Permettre le réglage de la ligne de flottaison"
«requirement» Finesse de la mesure Id = "3.2.2" Text = "Compenser la présence du dispositif de mesure"

- Exigence 3.2.1

La ligne de flottaison  $h_i$  sera ajustée par la valeur de  $m_7$  car  $h_i = \frac{m_5 - m_7}{\rho \cdot (2 \cdot e_5 \cdot L_5 + e_5^2)} = f(m_7)$

- Exigence 3.2.2

L'influence du poids du mât sera pour les mêmes raisons annulée en assignant à  $m_7$  la masse de ce mât.

- Incidence de l'emplacement du point d'ancrage

L'expression de  $h_i$  ne faisant pas intervenir la position du point d'ancrage, ce dernier n'aura donc aucune incidence sur la hauteur immergée.

Remarque : il est toutefois souhaitable de positionner ce point d'ancrage le plus possible à la verticale du point L afin de réduire le moment  $\vec{z}_0$  dans la glissière dû à l'action câble  $\rightarrow$  5, pour y limiter les frottements.

### 3.4 - Détermination du torseur des actions mécaniques de l'eau sur la maquette

**Question 16** Sur la base de la Figure 7, on considère le système constitué des solides (3), (4) et des 6 barres (Bi). Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle proposé. Que peut-on en déduire ?

- Calcul du degré d'hyperstatisme

Par définition, le degré d'hyperstatisme  $h = N_s - 6 \cdot n + m$

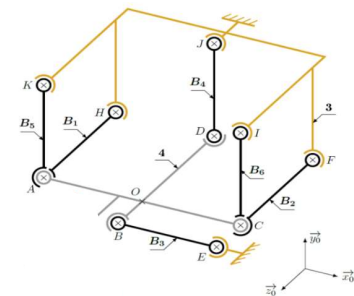
Nous dénombrons 12 liaisons et  $n=7$  solides hors bâti (3)

Mobilité :  $m_u = 0$  et  $m_i = 6$  (rotation propre de chaque Bi selon son axe)

$$\Rightarrow h = 0$$

- Déduction

Le système est isostatique, ce qui permet de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons et de garantir que le système n'est pas sur contraint. Ainsi les efforts dans les barres Bi modélisent/reflètent bien l'action de l'eau sur (5).



**Question 17** En tenant compte des hypothèses précédentes, déterminer le torseur  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$  (exprimé au point L) des actions mécaniques transmises par la liaison glissière entre (4) sur (5) en fonction de  $X_e$ ,  $Y_e$ , ...,  $N_e$  et des différents paramètres. On exprimera le résultat dans  $b_0$ .

- On isole {5}

- BAME

gravité $\{T_{g \rightarrow 5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} -m_5 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_5 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_L$	$\{T_{eau \rightarrow 5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} X_e \cdot \vec{x}_0 + Y_e \cdot \vec{y}_0 + Z_e \cdot \vec{z}_0 \\ L_e \cdot \vec{x}_0 + M_e \cdot \vec{y}_0 + N_e \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$
$\{T_{6 \rightarrow 5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} m_7 \cdot (g - \gamma_5) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m_7 \cdot (g - \gamma_5) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_L$	$\{T_{4 \rightarrow 5}\}_L = \left\{ \begin{array}{c} X_L \cdot \vec{x}_0 + Z_L \cdot \vec{z}_0 \\ L_L \cdot \vec{x}_0 + M_L \cdot \vec{y}_0 + N_L \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$

- Résolution : Par application du Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\{D_{5/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{Rd}_{5/0} \\ \vec{\delta}_{L,5/0} \end{matrix} \right\}_L = \left\{ \begin{matrix} m_5 \cdot \gamma_5 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_L = \left\{ \begin{matrix} \sum \vec{F}_{ext \rightarrow 5} \\ \sum \vec{M}_{L, ext \rightarrow 5} \end{matrix} \right\}_L = \{T_{ext \rightarrow 5}\}$$

Nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} X_e + X_L = 0 \\ Y_e - m_5 \cdot g + m_7 \cdot (g - \gamma_5) = m_5 \cdot \gamma_5 \\ Z_e + Z_L = 0 \\ L_e + L_L - Z_e \cdot \lambda(t) = 0 \\ M_e + M_L = 0 \\ N_e + N_L + X_e \cdot \lambda(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{T_{4 \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{matrix} -X_e \cdot \vec{x}_0 - Z_e \cdot \vec{z}_0 \\ (-L_e + Z_e \cdot \lambda(t)) \cdot \vec{x}_0 - M_e \cdot \vec{y}_0 - (N_e + X_e \cdot \lambda(t)) \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}$$

**Question 18** Sachant que les coordonnées de  $\{T_{4 \rightarrow 5}\}$  seront mesurées par les 6 capteurs dynamométriques de la balance, indiquer s'il est possible de mesurer  $Y_e$  avec ce dispositif. Justifier.

D'après la question précédente,  $Y_e = m_5 \cdot (g + \gamma_5) - m_7 \cdot (g - \gamma_5)$

Or  $\gamma_5$  n'est pas déterminé par les capteurs.

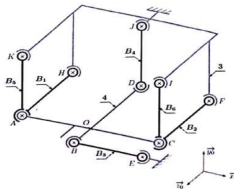
Conclusion : il n'est possible de mesurer  $Y_e$  avec ce dispositif.

**Question 19** Montrer que l'action mécanique de la barre (B<sub>1</sub>) sur (4) est un glisseur et préciser son axe.

Le solide B<sub>1</sub> (masse négligée) est en équilibre statique soumis à 2 glisseurs aux points A (rotule) et H (rotule). D'après le Principe Fondamental de la Statique, les résultantes de ces glisseurs ont pour direction [AH]

$$\Rightarrow \{T_{B_1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_1 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$$

L'axe de ce glisseur est donc  $(A, \vec{z}_0)$



**Question 20** Exprimer en fonction des F<sub>i</sub> la forme des torseurs des actions mécaniques suivantes dans la base b<sub>0</sub> :  $\{T_{B_1 \rightarrow 4}\}$ ,  $\{T_{B_2 \rightarrow 4}\}$ ,  $\{T_{B_3 \rightarrow 4}\}$ ,  $\{T_{B_4 \rightarrow 4}\}$ ,  $\{T_{B_5 \rightarrow 4}\}$ ,  $\{T_{B_6 \rightarrow 4}\}$ .

En appliquant le raisonnement de la question 19 à chaque barre B<sub>i</sub>, nous obtenons :

$\{T_{B_1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_1 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$	$\{T_{B_2 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_2 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$	$\{T_{B_3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_3 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$
$\{T_{B_4 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_4 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_D$	$\{T_{B_5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_5 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$	$\{T_{B_6 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_6 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$

Quels que soient les résultats obtenus précédemment, on admettra pour la suite :

$$\{T_{5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} X_e & L_e - \lambda(t) \cdot Z_e \\ 0 & M_e + e \cdot Z_e + f \cdot X_e \\ Z_e & N_e + \lambda(t) \cdot X_e \end{matrix} \right\}_{b_0}$$

**Question 21** Déterminer les expressions de  $X_e, Z_e, L_e, M_e$  et  $N_e$  en fonction de  $F_1, F_2, \dots, F_6$  et des diverses grandeurs géométriques.

- On isole (4)

- BAME :

$\{T_{5 \rightarrow 4}\}$ fourni par l'énoncé	$\{T_{g \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} -m_4 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$	
$\{T_{B_1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_1 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_1 \cdot \vec{z}_0 \\ a \cdot F_1 \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_O$	$\{T_{B_2 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_2 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} F_2 \cdot \vec{z}_0 \\ -a \cdot F_2 \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_O$	$\{T_{B_3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_3 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} F_3 \cdot \vec{x}_0 \\ d \cdot F_3 \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_O$
$\{T_{B_4 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_4 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_D = \left\{ \begin{matrix} F_4 \cdot \vec{y}_0 \\ a \cdot F_4 \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_O$	$\{T_{B_5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_5 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_5 \cdot \vec{y}_0 \\ -a \cdot F_5 \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O$	$\{T_{B_6 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} F_6 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} F_6 \cdot \vec{y}_0 \\ a \cdot F_6 \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O$

- Le Principe Fondamental de la Statique au point O  $\rightarrow \{T_{5 \rightarrow 4}\} + \{T_{g \rightarrow 4}\} + \sum_i \{T_{B_i \rightarrow 4}\} = \{0\}$  conduit à :

$$\begin{cases} X_e = -F_3 \\ F_4 + F_5 + F_6 = m_4 \cdot g \\ Z_e = -F_1 - F_2 \\ L_e - Z_e \cdot \lambda(t) = -a \cdot F_4 \\ M_e + e \cdot Z_e + f \cdot X_e = -a \cdot F_1 + a \cdot F_2 - d \cdot F_3 \\ N_e + X_e \cdot \lambda(t) = a \cdot F_5 - a \cdot F_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_e = -F_3 \\ Z_e = -F_1 - F_2 \\ L_e = -\lambda(t) \cdot (F_1 + F_2) - a \cdot F_4 \\ M_e = (e - a) \cdot F_1 + (e + a) \cdot F_2 + (f - d) \cdot F_3 \\ N_e = \lambda(t) \cdot F_3 + a \cdot (F_5 - F_6) \end{cases}$$

**Question 22** Au vu des expressions précédentes, quelle(s) grandeur(s) est-il nécessaire de connaître sur le système pour obtenir à tout instant une mesure de  $X_e, Z_e, L_e, M_e$  et  $N_e$  ? Proposer un dispositif permettant de connaître cette (ces) grandeur(s) en temps réel.

Il faut connaître les grandeurs : a, d, e, f, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub>, F<sub>5</sub>, F<sub>6</sub> et  $\lambda(t)$  Remarque :  $F_4 = m_4 \cdot g - F_5 - F_6$

Dispositif possible pour déterminer F<sub>1</sub> :

- Jauge extensiométrique collée sur chaque barre B<sub>i</sub>.

Dispositifs possibles pour déterminer  $\lambda(t)$  :

- Capteur potentiométrique linéaire.  
- Codeur monté sur une roue en pivot d'axe  $\vec{x}_0$  ou  $\vec{z}_0$  sur (4) et qui roule sans glisser sur le mât (5).

## 4. ETUDE DE L'EXIGENCE 1.2 : « GARANTIR UN DEPLACEMENT DU CHARIOT A VITESSE CONSTANTE »

**Objectif :** Modéliser l'asservissement en vitesse du chariot de traction puis régler les paramètres du correcteur afin de satisfaire tous les critères de l'exigence 1.2 du cahier des charges.

## 4.1 - Modélisation de l'asservissement en vitesse

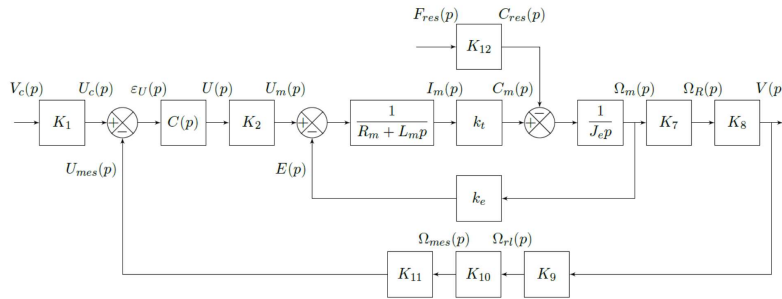


Figure 10 : Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du chariot

**Question 23** Indiquer les expressions littérales des gains  $K_8$  et  $K_9$ . Déterminer ensuite  $K_1$  en fonction des autres gains  $K_i$  permettant d'obtenir un écart  $\varepsilon_u(p)$  nul lorsque la sortie  $V(p)$  est égale à la consigne  $V_c(p)$  (vous préciserez les unités de chacun des gains demandés).

- Expressions de  $K_8$  et  $K_9$

Par lecture du schéma bloc :  $V(p) = K_8 \cdot \Omega_R(p)$  or la loi e/s du système roue motrice/rail est  $v(t) = -R \cdot \omega_R(t)$   
Par identification et passage dans Laplace puis identification, on obtient  $K_8 = -R$

Avec le même raisonnement pour la roue libre, on obtient :  $K_9 = -\frac{1}{r}$

$$\Rightarrow K_8 = -R = -0,25 \text{ m} \quad \text{et} \quad K_9 = -\frac{1}{r} = -6,66 \text{ m}^{-1}$$

- Expressions de  $K_1 = f(K_i)$

Par lecture du schéma bloc :  $\varepsilon_u(p) = V_c(p) \cdot K_1 - V_c(p) \cdot K_9 \cdot K_{10} \cdot K_{11} = 0$  lorsque  $V_c(p) = V(p)$

$$\Rightarrow K_1 = K_9 \cdot K_{10} \cdot K_{11} = -160 \text{ V.s.m}^{-1}$$

## 4.2 - Influence de la perturbation sur la réponse

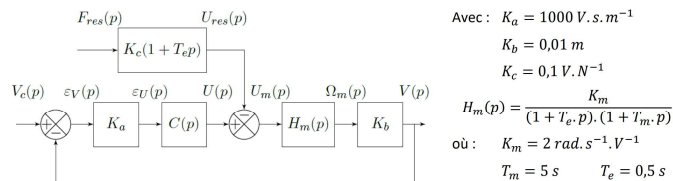


Figure 11: Schéma-blocs simplifié de l'asservissement

Avec :  $K_a = 1000 \text{ V.s.m}^{-1}$

$$K_b = 0,01 \text{ m}$$

$$K_c = 0,1 \text{ V.N}^{-1}$$

$$H_m(p) = \frac{K_m}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)}$$

$$\text{où : } K_m = 2 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$T_m = 5 \text{ s} \quad T_e = 0,5 \text{ s}$$

**Question 24** Déterminer l'expression littérale des fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  (la forme canonique n'est pas demandée). En déduire les expressions des réponses  $v_1$  et  $v_2$  en fonction de  $V_0, F_0, K_{bo}, K_m, K_c$  et  $K_b$ .

- Expression  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$

Par lecture du schéma bloc Figure 11 :

$$V(p) = (V_c(p) - V(p)) \cdot K_a \cdot C \cdot H_m(p) \cdot K_b - F_{res}(p) \cdot K_c \cdot (1 + T_e \cdot p) \cdot H_m(p) \cdot K_b$$

$$\Rightarrow V(p) = \frac{K_a \cdot C \cdot H_m(p) \cdot K_b}{1 + K_a \cdot C \cdot H_m(p) \cdot K_b} \cdot V_c(p) - \frac{K_c \cdot (1 + T_e \cdot p) \cdot H_m(p) \cdot K_b}{1 + K_a \cdot C \cdot H_m(p) \cdot K_b} \cdot F_{res}(p)$$

$$\Rightarrow V(p) = \frac{C \cdot K_a \cdot K_b \cdot K_m}{C \cdot K_a \cdot K_b \cdot K_m + (1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)} \cdot V_c(p) - \frac{K_c \cdot K_m \cdot K_b \cdot (1 + T_e \cdot p)}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p) + K_a \cdot C \cdot K_m \cdot K_b} \cdot F_{res}(p)$$

Par identification à l'expression de l'énoncé :  $V(p) = H_1(p) \cdot V_c(p) - H_2(p) \cdot F_{res}(p)$ , on en déduit :

$$H_1(p) = \frac{K_{bo}}{1 + K_{bo} + (T_m + T_e) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{K_c \cdot K_m \cdot K_b \cdot (1 + T_e \cdot p)}{1 + K_{bo} + (T_m + T_e) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

- Expression  $v_1$

Selon l'énoncé,  $v_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_1(p)$  en appliquant le théorème de la valeur finale et  $V_1(p) = \frac{V_0}{p}$ .

$$\Rightarrow v_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_{bo} \cdot V_0}{1 + K_{bo} + (T_m + T_e) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{K_{bo} \cdot V_0}{1 + K_{bo}}$$

- Expression  $v_2$

Selon l'énoncé,  $v_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_2(p)$  en appliquant le théorème de la valeur finale et  $V_2(p) = \frac{F_0}{p}$ .

$$\Rightarrow v_2 = \frac{K_c \cdot K_m \cdot K_b \cdot F_0}{1 + K_{bo}}$$

**Question 25** Déterminer la condition (notée  $C_{pert}$ ) sur le gain  $C$  du correcteur permettant de s'assurer que l'influence de la perturbation est négligeable devant l'influence de la consigne. Faire l'application numérique avec  $V_0 = 8 \text{ m/s}$  et  $F_0 = 400 \text{ N}$

- Expression  $C_{pert}$

En respect de l'énoncé, on doit vérifier  $|v_2| < 0,1 \cdot |v_1|$ . Etant donné le résultat précédent :

$$\frac{K_c \cdot K_m \cdot K_b \cdot F_0}{1 + C_{pert} \cdot K_a \cdot K_b \cdot K_m} < 0,1 \cdot \frac{C_{pert} \cdot K_a \cdot K_b \cdot K_m \cdot V_0}{1 + C_{pert} \cdot K_a \cdot K_b \cdot K_m} \Rightarrow K_c \cdot F_0 < 0,1 \cdot C_{pert} \cdot K_a \cdot V_0$$

$$\Rightarrow C_{pert} > \frac{10 \cdot K_c \cdot F_0}{K_a \cdot V_0}$$

- Application numérique

$$\Rightarrow C_{pert} > \frac{10 \times 0,1 \times 400}{1000 \times 8} = 0,05 \text{ sans unité}$$

$$K_a = 1000 \text{ V.s.m}^{-1}$$

$$K_b = 0,01 \text{ m}$$

$$K_c = 0,1 \text{ V.N}^{-1}$$



### 4.3 - Etude d'un premier correcteur

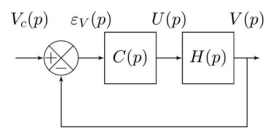


Figure 12 : Schéma-blocs simplifié (sans perturbation)

$$H(p) = \frac{K_N}{(1 + T_m \cdot p) \cdot (1 + T_e \cdot p)}$$

Avec :  $K_N = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$   
 $T_m \approx 5 \text{ s}$        $T_e \approx 0,5 \text{ s}$

**Question 26** Déterminer les expressions littérales de l'erreur statique  $E_s$  (consigne : échelon d'amplitude  $V_0$ ) et de l'erreur de trainage  $E_T$  (consigne : rampe de pente  $\gamma_0$ ) de cet asservissement corrigé avec  $C_1(p)$  en fonction de la consigne, du gain  $K_N$  et des paramètres du correcteur  $C$  et  $T_m$ . En déduire la condition (notée  $C_\varepsilon$ ) sur le gain  $C$  du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.

1.2.3	Précision : Erreur statique pour une entrée :	$E_s = 0$
	$v_e(t) = V_0 \cdot u(t)$ avec $V_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	
	Erreur de trainage pour une entrée :	
	$v_e(t) = \gamma_0 \cdot t \cdot u(t)$ avec $\gamma_0 = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	$E_T \leq 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$K_N = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$T_m \approx 5 \text{ s} \quad T_e \approx 0,5 \text{ s}$$

La FTBO du système simplifié s'écrit :  $FTBO(p) = C(p) \cdot H(p) = \frac{C \cdot K_N}{T_m \cdot p \cdot (1 + T_e \cdot p)} = \frac{K'_{BO}}{p \cdot (1 + T_e \cdot p)}$  avec  $K'_{BO} = \frac{C \cdot K_N}{T_m}$

- Expression  $E_s$

La classe de la BO étant égale à 1 et l'entrée de type échelon, par définition  $\rightarrow E_s = 0$

- Expression  $E_T$

La classe de la BO étant égale à 1 et l'entrée de type rampe, par définition  $\rightarrow E_T = \frac{\gamma_0}{K'_{BO}}$

$$\Rightarrow E_T = \frac{\gamma_0 \cdot T_m}{C \cdot K_N}$$

- Condition  $C_\varepsilon$

L'exigence 1.2.3 stipule :  $E_s = 0$  et  $E_T \leq 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- La condition sur  $E_s$  est respectée.

$$- E_T \leq 0,16 \Rightarrow \frac{\gamma_0 \cdot T_m}{C \cdot K_N} \leq 0,16 \Rightarrow C_\varepsilon \geq \frac{\gamma_0 \cdot T_m}{0,16 \cdot K_N} = \frac{1,6 \times 5}{0,16 \times 20} = 2,5 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

**Question 27** Déterminer la condition (notée  $C_\varphi$ ) sur le gain  $C$  du correcteur permettant de satisfaire uniquement le critère de marge de phase de l'exigence 1.2.2 du cahier des charges. Faire l'application numérique (on pourra utiliser la courbe fournie en annexe 1).

1.2.2	Stabilité : Marge de gain	$M_G \geq 12 \text{ dB}$
	Marge de phase	$M_\varphi \geq 45^\circ$

Par définition : Marge de phase =  $M_\varphi = 180^\circ + \text{phase}(FTBO(\omega_{\text{dB}}))$

Par lecture graphique pour  $C = 1$  (en vert) :  
 $\omega_{\text{dB}} = 2,3 \text{ rd/s}$  et donc  $M_\varphi \approx 38^\circ < 45^\circ$

La valeur du gain pur  $C\varphi$  n'influençant pas la courbe de phase, elle doit redescendre la courbe de gain de 3 dB car :

• Phase ( $FTBO(\omega = 2 \text{ rd/s})$ )  $\approx 45^\circ$   
 • Gain ( $FTBO(\omega = 2 \text{ rd/s})$ )  $\approx 3 \text{ dB}$

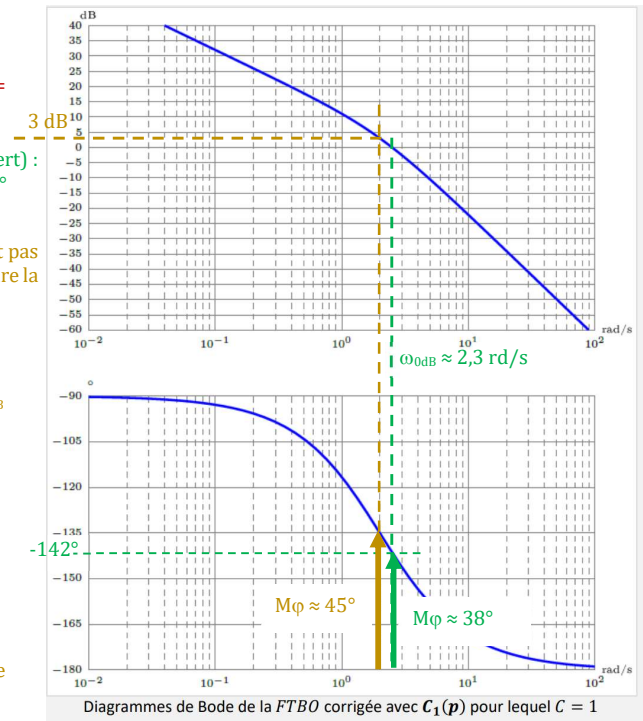
$\omega = 2 \text{ rd/s}$  va devenir la nouvelle  $\omega_{\text{dB}}$

Ainsi :  $M_\varphi \geq 45^\circ \Rightarrow 20 \cdot \log(C\varphi) < -3$

**Conclusion :**

$$C\varphi < 10^{\frac{-3}{20}} \approx 0,7 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

Remarque :  
Marge de gain respectée car infinie



**Question 28** Conclure quant à la capacité de ce correcteur à satisfaire le cahier des charges.

La question 26 conduit à :  $C_\varepsilon \geq 2,5 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  pour respecter l'exigence 1.2.3.

La question 27 conduit à :  $C\varphi < 0,7 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  pour respecter l'exigence 1.2.2.

Ces 2 résultats étant incompatibles, ce correcteur ne peut satisfaire le cahier des charges.

### 4.4 - Réglage du correcteur PID

On choisit finalement de prendre le correcteur Proportionnel Intégral Dérivé suivant :

$$C_2(p) = C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p\right) \quad \text{avec} \quad T_i = 2 \cdot T_e \quad \text{et} \quad T_d = \frac{T_e}{2}$$

**Question 29** Montrer que l'on peut mettre ce correcteur sous la forme  $C_2(p) = \frac{K}{p} \cdot (1 + T \cdot p)^2$  et donner les expressions de  $K$  et de  $T$  en fonction de  $C$  et  $T_e$ .

$$C_2(p) = C \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot T_e \cdot p} + \frac{T_e}{2} \cdot p\right) = \frac{C}{2 \cdot T_e \cdot p} \cdot (2 \cdot T_e \cdot p + 1 + T_e^2 \cdot p^2) = \frac{C}{2 \cdot T_e \cdot p} \cdot (1 + T_e \cdot p)^2$$

$C_2(p)$  est donc bien de la forme :  $\frac{K}{p} \cdot (1 + T_e \cdot p)^2$  avec  $K = \frac{C}{2 \cdot T_e}$  et  $T = T_e$

**Question 30** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé. En déduire les expressions littérales de l'erreur statique  $E_s$  (consigne : échelon d'amplitude  $V_0$ ) et de l'erreur de trainage  $E_T$  (consigne : rampe de pente  $\gamma_0$ ) de cet asservissement corrigé. En déduire la condition sur la valeur du gain  $K$  du correcteur permettant de satisfaire l'exigence 1.2.3 du cahier des charges.

- Expression FTBO(p)

La FTBO du système simplifié s'écrit :  $FTBO(p) = C_2(p) \cdot H(p) = \frac{K}{p} \cdot (1 + T_e \cdot p)^2 \cdot \frac{K_N}{(1 + T_e \cdot p)(1 + T_m \cdot p)}$

$$\Rightarrow FTBO(p) = \frac{K \cdot K_N}{p} \cdot \frac{(1 + T_e \cdot p)}{(1 + T_m \cdot p)}$$

- Expression  $E_s$

La classe de la BO étant égale à un et l'entrée de type échelon  $\rightarrow$  Par définition :  $E_s = 0$

- Expression  $E_T$

La classe de la BO étant égale à un et l'entrée de type rampe  $\rightarrow$  Par définition :  $E_T = \frac{\gamma_0}{K_{BO}''}$  avec  $K_{BO}'' = K \cdot K_N$

$$\Rightarrow E_T = \frac{\gamma_0}{K \cdot K_N}$$

- Condition  $K$

L'exigence 1.2.3 stipule :  $E_s = 0$  et  $E_T \leq 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- La condition sur  $E_s$  est respectée.

-  $E_T \leq 0,16 \Rightarrow \frac{\gamma_0}{K \cdot K_N} \leq 0,16 \Rightarrow$

$$K \geq \frac{\gamma_0}{0,16 \cdot K_N} = \frac{1,6}{0,16 \cdot 20} = 0,5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**Question 31** La courbe réelle de la phase de la FTBO est représentée sur le cahier réponse. Compléter le tracé avec les diagrammes de Bode asymptotiques (gain et phase) de la FTBO du système corrigé avec le correcteur  $C_2(p)$  (avec  $K = 0,05 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ). On assimilera la courbe réelle de gain à son tracé asymptotique. Tracer la marge de phase sur le cahier réponse et conclure quant au respect du cahier des charges.

$$K_N = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$T_m \approx 5 \text{ s} \quad T_e \approx 0,5 \text{ s}$$

- diagrammes de Bode asymptotiques

$$FTBO(p) = \frac{K \cdot K_N}{p} \cdot \frac{(1 + T_e \cdot p)}{(1 + T_m \cdot p)} \Rightarrow FTBO(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1 + 0,5 \cdot p)}{(1 + 5 \cdot p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1 + \frac{p}{2})}{(1 + 5 \cdot p)}$$

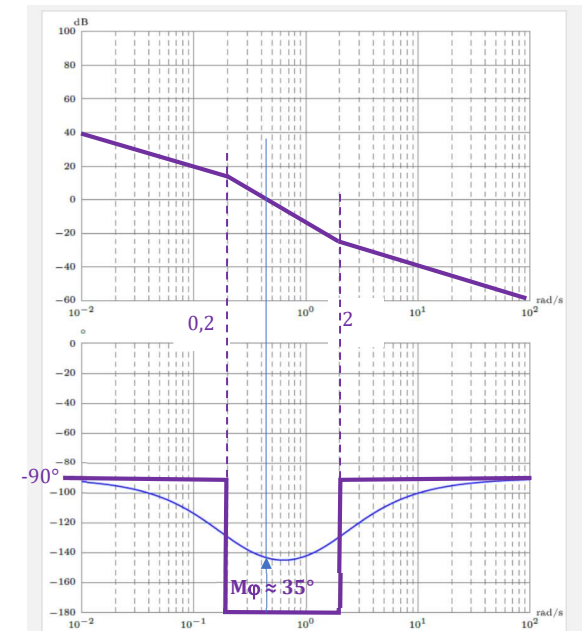
Construction des asymptotes :

- L'intégrateur  $\frac{1}{p}$  perd 20 dB/décade et 90°.

- A la pulsation de cassure  $\frac{1}{T_m} = 0,2 \text{ rd/s}$ , le premier ordre perd 20 dB/décade et 90° de plus

- A la pulsation de cassure  $\frac{1}{T_e} = 2 \text{ rd/s}$ , le premier ordre inversé regagne 20 dB/décade et 90°

D'où, ci-contre, les diagrammes de Bode asymptotiques de la FTBO du système corrigé avec le correcteur  $C_2(p)$



Diagrammes de Bode de la FTBO corrigée avec  $C_2(p)$  pour lequel  $K = 0,05 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Ou un tableau

	0	0,2	2
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}$
$1 + \frac{p}{2}$	1	1	$\frac{p}{2}$
$\frac{1}{1 + \frac{p}{0,2}}$	1	$\frac{0,2}{p}$	$\frac{0,2}{p}$
$FTBO(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{0,2}{p^2}$	$\frac{0,1}{p}$

Calcul d'un point de la première asymptote :

La droite passe par le point ( $10^{-2} \text{ rd/s}$ , 40 dB)

- Marge de phase

Par lecture graphique en assimilant la courbe réelle de gain à son tracé asymptotique, on relève une marge de phase  $M\phi$  de  $35^\circ < 45^\circ$  ; le cahier des charges n'est toujours pas respecté.



On choisit finalement le réglage du correcteur  $C_2(p)$  suivant, qui permet de satisfaire l'exigence 1.2.2 :

$$C_2(p) = \frac{7,5}{p} \cdot (1 + 0,5 \cdot p)^2$$

On réalise une simulation, dont les résultats sont donnés sur la Figure 13, la Figure 14 et la Figure 15.

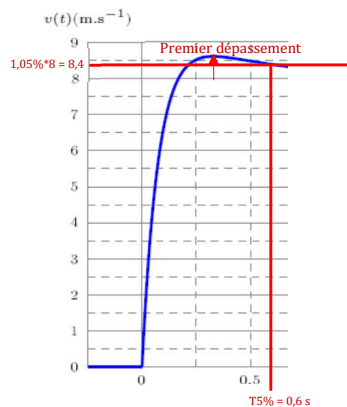


Figure 13 :

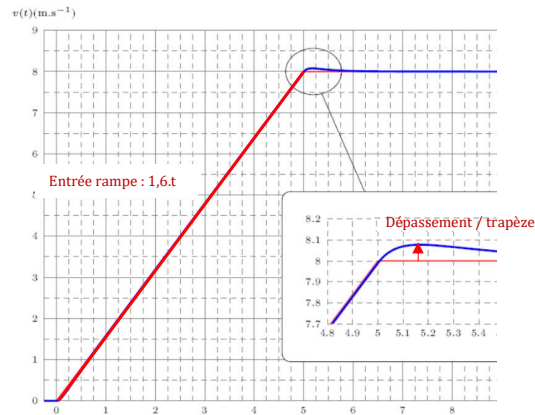


Figure 14 : Réponse à un trapèze de vitesse avec  $V_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$  et accélération

**Question 32** Relever la valeur du premier dépassement puis du temps de réponse pour le système soumis à un échelon. Relever le dépassement pour le système soumis à un trapèze de vitesse. Conclure quant à la capacité de ce correcteur à satisfaire l'exigence 1.2 du cahier des charges.

- Valeurs dépassements et temps de réponse

Par lecture sur les courbes fournies Figures 13 et 14 :

	Dépassement en m. s <sup>-1</sup>	Temps de réponse en s
Echelon	0,6	0,6
Trapèze	0,08	

- Conclusion vis-à-vis de l'exigence 1.2

Exigence 1.2.1 : respectée car  $T_{5\%} = 0,6 < 3s$

Exigence 1.2.2 : Respectée car la marge de gain est infinie et le gain est remonté de plus de 20 dB par rapport à Q31 entraînant une marge de phase supérieure à 45°.

Exigence 1.2.3 : respectée pour la réponse à l'échelon de vitesse  $8.u(t)$  car valeur finale de la réponse =  $8 \text{ m.s}^{-1}$   
respectée pour la réponse à la rampe de vitesse car  $E_T = 0 < 0,16 \text{ m/s}$  pour  $t \in [0,5] \text{ s}$

Exigence 1.2.4 : respectée pour la réponse à l'échelon de vitesse car  $D_{1E} = 0,6 < 10\% \cdot 8 = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$   
respectée pour la réponse à un trapèze de vitesse car  $D_{1T} = 0,08 < 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

1.2	Garantir un déplacement du chariot à vitesse constante	1.2.1	Rapidité : Temps de réponse à 5%	$T_{5\%} \leq 3s$
		1.2.2	Stabilité : Marge de gain Marge de phase	$M_G \geq 12 \text{ dB}$ $M_\phi \geq 45^\circ$
		1.2.3	Précision : Erreur statique pour une entrée : $v_1(t) = V_0 \cdot u(t)$ avec $V_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ Erreur de traînage pour une entrée : $v_2(t) = \gamma_0 \cdot u(t)$ avec $\gamma_0 = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$	$E_s = 0$ $E_T \leq 0,16 \text{ m.s}^{-1}$
		1.2.4	Dépassement : En réponse à un échelon de vitesse En réponse à un trapèze de vitesse (d'accélération maximale $\gamma_0$ )	$D_E \leq 10\%$ $D_T \leq 0,1 \text{ m.s}^{-1}$

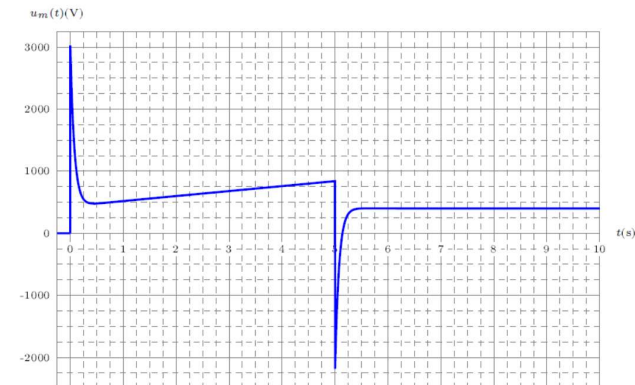


Figure 15 : Evolution de la tension moteur soumis à une consigne en trapèze de vitesse.

**Question 33** Commenter la courbe de tension du moteur (Figure 15) pour une consigne en trapèze de vitesse. Au vu de cette analyse, proposer une modification du modèle de la Figure 10 afin de limiter les écarts entre la simulation et le comportement réel du système.

- Commentaires courbe

$t \in [0,5] \text{ s}$  : phase d'accélération. Au démarrage, pic de tension très élevé de 3000 Volts puis la tension croît linéairement entre 500 et 900 volts car  $F_{\text{res}}$  augmente avec la vitesse de  $(5)/(0)$ .  
Après 5s : mouvement uniforme. A  $t = 5 \text{ s}$ , pic de tension élevé de -2200 Volt (pour limiter le dépassement de la réponse en vitesse) puis la tension, constante à 400 V, compense  $F_{\text{res}}$  (et frottements)

- Modification du modèle

L'énoncé ne donne aucune caractéristique électrique du moteur, ni de sa commande.  
La Figure 15 fait ressortir une tension négative (la commande est-elle 2ou4 quadrants ?) et un pic à 3000 volts (le moteur le supporte-t-il ?). Selon la réponse, il faudra rajouter dans le schéma de la Figure 10 (après le bloc K2) un bloc qui limitera la tension/saturateur (non linéarité).