

Contexte d'étude du système

L'industrie subit sa quatrième révolution industrielle, révolution tournée vers la transformation digitale, nommée « Industrie 4.0 ». Axelle est un démonstrateur technologique ou plutôt un « *concept machine* » (**Figure 1**). Elle donne un exemple concret de ce que pourraient être les moyens de production dans l'industrie du futur.



Figure 1 – Axelle, « *concept machine* » pour l'industrie 4.0

Axelle a été conçue par l'entreprise bourguignonne « ATS Ingénierie » et elle intègre l'ensemble des produits et solutions des différents membres du Collectif Continuité Numérique. Initialement experte dans la conception et la réalisation d'outils de production, ATS s'est spécialisée aujourd'hui dans le domaine de la transformation digitale.

Le Collectif Continuité Numérique, qui a vu le jour en 2018, rassemble 8 sociétés¹, parfois concurrentes, spécialisées dans la fabrication ou le développement de solutions technologiques dans différents domaines de l'OT (Operational Technology) ou de l'IT (Information Technology). Ce rapprochement a pour objectif de développer des solutions pré-intégrées d'échange et de partage de données qui vont équiper les chaînes de production. Toutes ces informations vont permettre d'enrichir une base de données sous forme de « jumeau numérique » qui sera mise à disposition des travailleurs connectés. Ce jumeau numérique permettra, par exemple, de réaliser plus facilement des opérations de maintenance préventive ou prédictive.

Présentation du système

Le démonstrateur Axelle (**Figure 2**) est composé d'un convoyeur, d'un poste robotisé d'assemblage et d'un chariot convoyeur autoguidé (AGV). Dans ce sujet, l'étude ne porte que sur la partie Robot Delta 2D du démonstrateur.

1. Festo, SAP, Inetum, Ifm Electronic, Phoenix Contact, SICK, SEW USOCOME et Stäubli

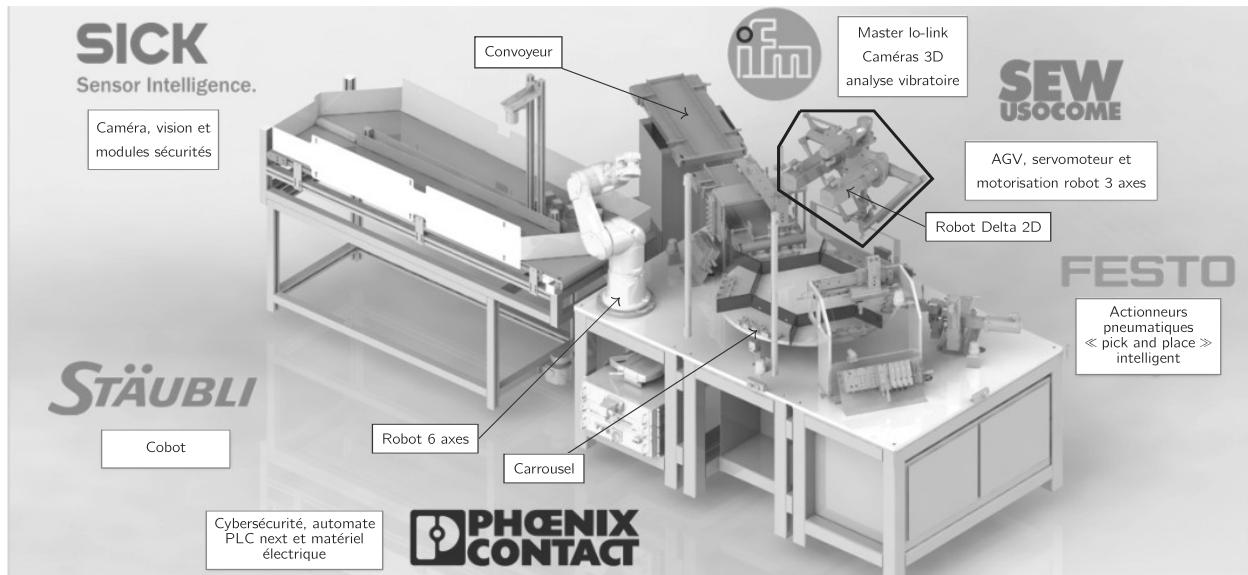


Figure 2 – Structure du démonstrateur

Une vue en perspective du Robot Delta est donnée **Figure 15** en **Annexe A.1**. Elle met en évidence la motorisation des bras principaux 1 et 2 permettant de déplacer, dans un plan de normale \vec{z}_0 , le plateau 5. Un troisième moteur permet d'orienter l'objet déplacé suivant l'axe vertical.

Structure du sujet

L'étude se structure en 3 parties indépendantes. La première permet d'appréhender le Robot Delta dans son fonctionnement global. La partie suivante porte sur l'étude du mécanisme tandis que la dernière partie se consacre à l'étude de la régulation en position des bras principaux.

Travail demandé

Après une lecture attentive du sujet (environ 20 min), il est proposé une étude articulée autour de trois parties indépendantes (les durées indiquées correspondent au poids relatif de chacune d'elles) :

- Partie A : Analyse du fonctionnement du Robot Delta (40 min)
- Partie B : Étude de l'architecture mécanique du Robot Delta (2h)
 - B-1 : Étude mécanique de la structure 3D (30 min)
 - B-2 : Étude cinématique de la structure 2D (45 min)
 - B-3 : Étude dynamique de la structure 2D (45 min)
- Partie C : Étude de l'asservissement en position du Robot Delta (2h)
 - C-1 : Modélisation de la chaîne d'énergie (1h15)
 - C-2 : Modélisation du comportement de la commande (45 min)

Applications numériques et notations

Applications numériques

Dans le domaine des Sciences Industrielles, le fait de savoir calculer et analyser les valeurs des grandeurs utiles au dimensionnement est aussi important que celui de savoir déterminer leurs expressions littérales. C'est pourquoi, **une attention toute particulière sera accordée à la réalisation des applications numériques.**

Pour réaliser celles-ci sans l'usage d'une calculatrice, vous pourrez faire des approximations de bon sens, qui conduiront éventuellement à une erreur relative de quelques pourcents sur le résultat final. Par exemple, dans le calcul suivant, qui fait intervenir l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, on pourra prendre :

$$\frac{\pi^2}{2} \times \frac{100}{24} \times (5 + 3 \cdot 10^{-2}) \times g \approx \frac{10}{2} \times 4 \times 5 \times 10 = 1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Notations

Pour simplifier les notations dans ce sujet, le référentiel correspondant à un repère \mathcal{R}_i est lui aussi désigné par \mathcal{R}_i . Les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du mouvement du solide **j** par rapport au solide **i** (ou par rapport au référentiel \mathcal{R}_i lié à celui-ci), exprimés en A , sont notés respectivement :

$$\mathcal{V}_{j/i} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(j/i)} \\ \vec{V}_{(A,j/i)} \end{array} \right\}, \quad \mathcal{C}_{j/i} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}_{(j/i)} \\ \vec{\sigma}_{(A,j/i)} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{j/i} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{\gamma}_{(j/i)} \\ \vec{\delta}_{(A,j/i)} \end{array} \right\}$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide **i** sur le solide **j**, exprimé en A , est noté :

$$\mathcal{F}_{i \rightarrow j} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{(A,i \rightarrow j)} \end{array} \right\}$$

Si le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques précédents sont exprimés en projection dans une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on utilisera les notations :

$$\mathcal{V}_{j/i} = {}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \left\{ \begin{array}{cc} p_{ji} & u_{ji} \\ q_{ji} & v_{ji} \\ r_{ji} & w_{ji} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{i \rightarrow j} = {}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \left\{ \begin{array}{cc} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{array} \right\}$$

Les dérivées première et seconde d'une quantité $x(t)$ par rapport au temps pourront être notées indifféremment :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Enfin, on notera, lorsque cela est possible, une fonction dans le domaine temporel par une lettre minuscule (e.g. $i(t)$) et sa transformée de Laplace par une lettre majuscule (soit $I(p)$).

Objectif : analyser le fonctionnement du Robot Delta lors d'opérations de pick & place.

Un diagramme de blocs internes (**ibd**) donné dans le cahier réponses à la **Q1** définit la structure fonctionnelle du Robot Delta.

La vue en perspective du Robot Delta donnée **Figure 15** en **Annexe A.1** décrit un système à trois degrés de liberté (translations dans un plan de normale \vec{Z}_0 et rotation autour d'un axe vertical de direction \vec{y}_0) permettant de déplacer et de mettre en position des cubes. Chaque cube est saisi par un préhenseur à ventouse lié en rotation à une plate-forme (voir **Annexe B**). Le déplacement de la plate-forme dans le plan est le résultat de la combinaison des mouvements de rotation de deux motoréducteurs, droit et gauche, qui agissent sur deux mécanismes. La rotation du préhenseur autour de l'axe vertical est réalisée par un troisième motoréducteur et un mécanisme à cardans.

Une caméra située derrière la structure Delta (**Figure 15**) permet d'identifier le type de cube pris par le préhenseur à ventouse. L'orientation de l'objectif est matérialisée sur la figure de la **Q4** du cahier réponse. Le tableau de la **Figure 21** en **Annexe C.2** donne les trois possibilités d'identification.

- Q1-** Repérer sur le diagramme de blocs internes (**ibd**) les flux d'énergie avec la lettre **E** et les flux d'informations avec la lettre **I**.
- Q2-** Donner, en termes de chaînes fonctionnelles, le nom générique et la fonction des éléments listés dans le cahier réponses.
- Q3-** Compléter le schéma pneumatique du document réponse, lié au préhenseur à ventouse.

Ce robot est piloté de manière à effectuer un cycle de démonstration. Le cycle de démonstration est défini par le diagramme d'états (**stm**) **Figure 22**, **Annexe C**. Il consiste à déplacer des cubes marqués A ou B (voir **Figure 21**) sur différents emplacements (voir **Figure 3**). Initialement deux cubes A ou B sont aux emplacements 1 et 2 (voir **Figure 4**). Une caméra permet de reconnaître le type de cube en filmant la face du cube se trouvant dans le champ de vision de l'objectif.

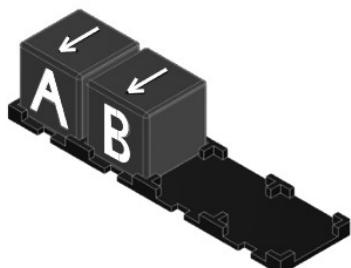


Figure 3 – Cubes A et B sur le support

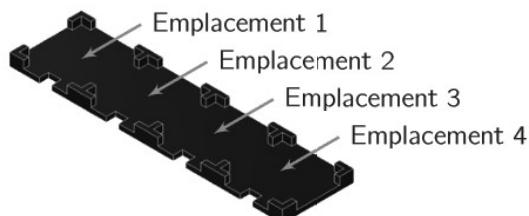


Figure 4 – Définition des emplacements

- Q4-** Après avoir consulté l'**Annexe C.1** et avec l'aide du diagramme d'états (**stm**) du cycle aller **Figure 23**, repérer dans le tableau du cahier réponse la position (emplacement 1, 2, 3 et/ou 4) et l'orientation de chaque cube en fin de cycle, **sans** apparition d'arrêt d'urgence, pour chacun des cas où la colonne de gauche donne la condition de départ.

Exemple : s'il doit y avoir un cube A à l'emplacement 1 avec sa face gravée vers l'avant (comme sur le premier état initial représenté), on entourera sur la ligne correspondant à l'emplacement 1, A et ↗ ; s'il n'y a pas de cube à l'emplacement 2, on entourera sur la ligne correspondant à l'emplacement 2, uniquement Ø.

B.1 Étude mécanique de la structure 3D**B.1.1 — Description structurelle du Robot Delta**

Objectif : valider la structure 3D du Robot Delta.

La rotation verticale de l'objet transporté n'étant pas étudiée ici, le Robot Delta s'apparente à un système à deux degrés de liberté permettant de mettre en position un préhenseur au niveau du plateau 5 (voir **Figure 15** et **Figure 16** en **Annexe A**).

Deux moto-réducteurs permettent d'actionner de façon indépendante les bras principaux 1 et 2 en liaison pivot avec le bâti 0 d'axes respectifs (A_1, \vec{z}_0) et (A_2, \vec{z}_0). Un ensemble de deux bras (3a et 3b) permet de relier le bras moteur 1 au plateau 5 via deux liaisons pivot d'axe (B_1, \vec{z}_0) avec le bras principal 1 et deux liaisons pivot d'axe (C_1, \vec{z}_0) avec le plateau 5. De même, un ensemble de deux bras (4a et 4b) sont en liaison pivot d'axe (B_2, \vec{z}_0) avec le bras principal 2 et d'axe (C_2, \vec{z}_0) avec le plateau 5.

Le système de mise en position du plateau 5 est complété par le triangle 7, en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{z}_0) avec le bras principal 1 et en liaison rotule de centre F avec la bielle 6 d'une part et en liaison rotule de centre G avec la bielle 8 d'autre part.

Les bielles 6 et 8 sont respectivement en liaison rotule de centre E avec le plateau 5 et de centre H avec la bâti 0. Cette description du mécanisme de mise en position du plateau 5 est décrite par le graphe des liaisons **Figure 6**, conformément à la vue 3D **Figure 15**.

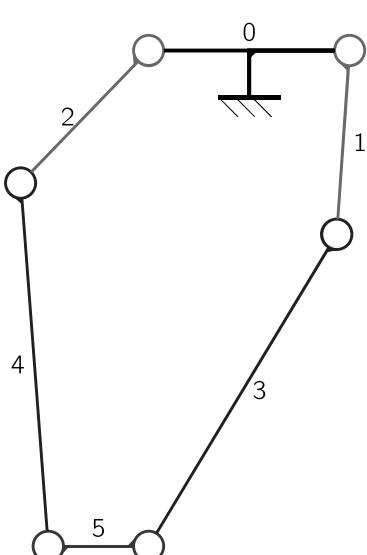


Figure 5 – Schéma cinématique pariel du Robot Delta

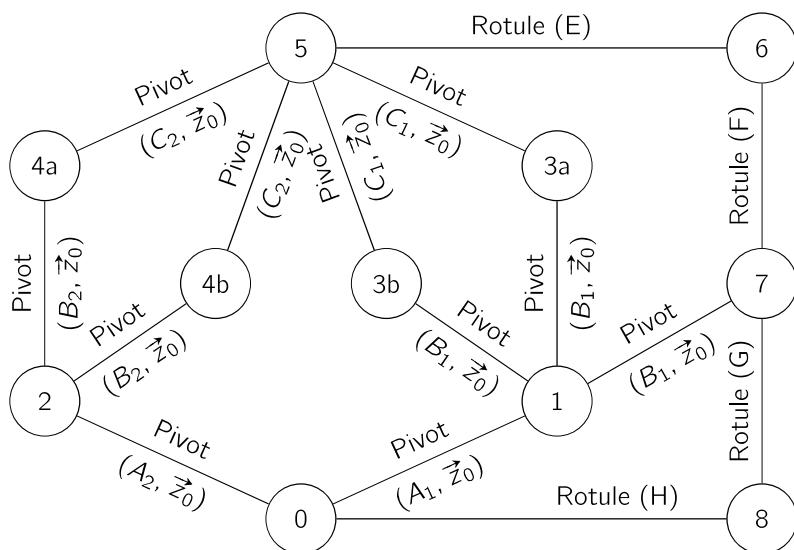


Figure 6 – Graphe des liaisons du mécanisme de mise en position du plateau 5

B.1.2 — Analyse d'une première partie du mécanisme

Objectif : appréhender le mécanisme dans une version simplifiée.

On considère le schéma cinématique **Figure 5** représentant la base de la structure du Robot Delta se limitant au bâti 0, aux deux bras principaux 1 et 2, à deux bras secondaires 3 et 4 et au plateau 5.

- Q5-** Donner le nombre de degrés de liberté entre le plateau 5 et le bâti 0 (**Figure 5**). Sans calcul, donner le nom de la liaison équivalente entre le plateau 5 et le bâti 0. Cela correspond-il à la cinématique globale recherchée pour le plateau 5 ?
- Q6-** Déterminer le degré d'hyperstatisme de la structure du mécanisme partiel (**Figure 5**).

5/2

Remarque : une étude en 3D est attendue (pas de simplification liée à la modélisation plane).

B.1.3 — Analyse de la structure complète

Objectif : analyser le mécanisme global. Réduire le nombre de contraintes de montage.

Pour rappel, la **Figure 15** donne une vue en perspective de la structure réelle du Robot Delta. Le graphe des liaisons correspondant est donné **Figure 6**.

- Q7-** Sans calcul, donner le nombre de degrés de liberté entre le plateau 5 et la bâti 0. Caractériser le mouvement du plateau 5 par rapport au bâti 0.
- Q8-** Déterminer le degré d'hyperstatisme de cette nouvelle structure.
- Q9-** Proposer un jeu de liaisons entre les solides 2, 4a, 4b et 5 permettant de réduire le degré d'hyperstatisme tout en conservant la même cinématique globale (mêmes degrés de mobilités utiles **et** internes). Indiquer la réduction du degré d'hyperstatisme.

5/2

B.2 Étude cinématique plane de la structure 2D

B.2.1 — Modélisation plane

L'étude conduite partie **Partie B.1** permet de simplifier l'étude du déplacement du Robot Delta dans un plan de normale \vec{Z}_0 . Les bras secondaires 3a et 3b sont remplacés par un unique bras 3 et il en est de même pour les bras 4a et 4b, remplacés par un unique bras 4.

La **Figure 16** présente le schéma cinématique plan du Robot Delta et donne son paramétrage.

B.2.2 — Coordonnées articulaires et coordonnées cartésiennes

Objectif : obtenir le modèle inverse - coordonnées articulaires en fonction des coordonnées cartésiennes.

Pour placer le Robot Delta dans la position désirée par l'utilisateur sous la forme des coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$, il convient de positionner les bras principaux 1 et 2 avec les angles $\theta_{10}(t)$ et $\theta_{20}(t)$ idoines. Le couple $(\theta_{10}(t), \theta_{20}(t))$ correspond alors aux coordonnées articulaires.

- Q10-** A partir de la **Figure 16**, donner les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $\theta_{10}(t)$, $\theta_{30}(t)$ et de paramètres géométriques constants.

Une étude géométrique permet d'obtenir la position la plus basse du Robot Delta pour $x = 0$ et $\theta_{10} = \theta_{30} = \theta_{ref} = -\pi - \theta_{20} = -\pi - \theta_{40}$ ($-\pi < \theta_{ref} < 0$). On appelle cette position, position de référence du Robot Delta et pour cette position $y = -h_0$.

Q11- A partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$ obtenues à la **Q10**, déterminer l'expression de θ_{ref} en fonction de a , b , c et d puis l'expression de h_0 en fonction de a , b , c et d .

Q12- A partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$ obtenues à la **Q10**, déterminer une relation liant uniquement $x(t)$, $y(t)$, $\theta_{10}(t)$ et des paramètres géométriques constants.

Une démarche similaire a permis de déterminer une relation entre $x(t)$, $y(t)$ et $\theta_{20}(t)$ (B.1) :

$$(x(t) + a - d - b \cdot \cos(\theta_{20}(t)))^2 + (y(t) - b \cdot \sin(\theta_{20}(t)))^2 - c^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

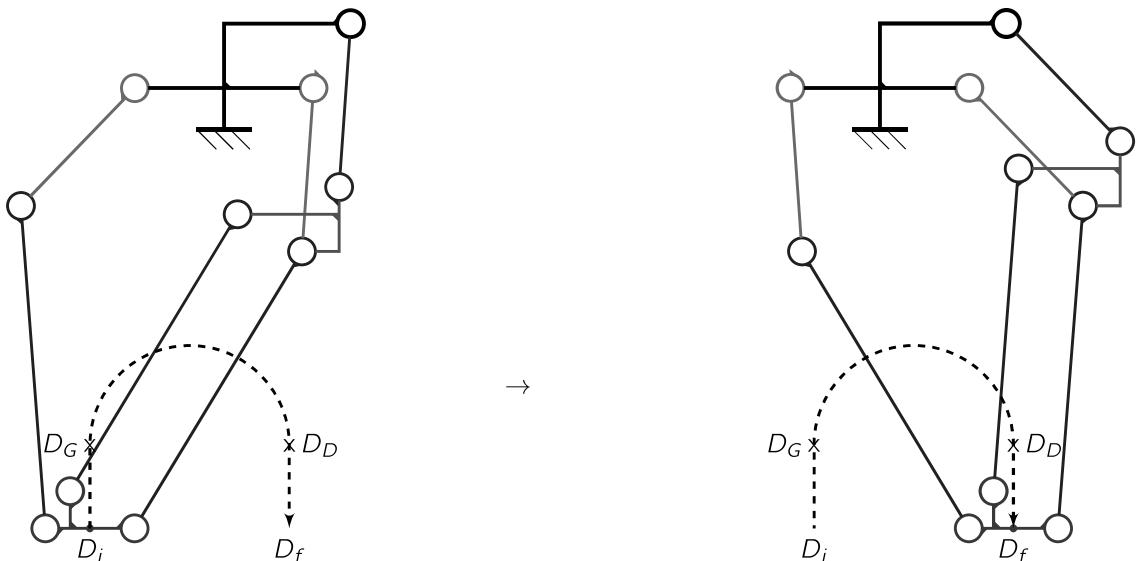


Figure 7 – Déplacement pick-and-place en arc de cercle de D_i vers D_f

Lors d'un mouvement de pick-and-place (prise et placement), le point D , qui sert de référence pour le positionnement de la charge, se déplace :

- verticalement d'une amplitude Δ_y , du point D_i de coordonnées $(-r_p, -h_0 + e)$ vers le point D_G de coordonnées $(-r_p, -h_0 + e + \Delta_y)$
- en arc de cercle de centre de coordonnées $(0, -h_0 + e + \Delta_y)$, du point D_G vers le point D_D de coordonnées $(r_p, -h_0 + e + \Delta_y)$ en passant par le point de coordonnées $(0, -h_0 + e + \Delta_y + r_p)$
- verticalement d'une amplitude $-\Delta_y$, du point D_D au point D_f de coordonnées $(r_p, -h_0 + e)$

Pour obtenir les coordonnées articulaires (θ_{10} et θ_{20}) à partir des coordonnées cartésiennes (x et y), on utilise une méthode numérique avec un programme rédigé en langage **Python**. On décompose alors le mouvement de pick-and-place en $3.n + 1$ positions avec :

- **phase 1** : $n + 1$ positions de D_i à D_G
- **phase 2** : $n + 1$ positions de D_G à D_D
- **phase 3** : $n + 1$ positions de D_D à D_f

On suppose que le programme contient déjà les lignes permettant de définir les variables n , h_0 , e , r_p , θ_{ref} et Δ_y respectivement représentatives des grandeurs n , h_0 , e , r_p , θ_{ref} et Δ_y . Pour chaque phase, on souhaite une répartition linéaire des points (voir **Figure 24** en **Annexe D**).

Dans le mouvement du point D de D_i vers D_f , on note x_k et y_k l'abscisse et l'ordonnée de la $k^{\text{ème}}$ position du point D .

Q13- Déterminer les expressions de x_k et y_k en fonction de k , n , r_p , h_0 , e et Δ_y , dans le mouvement du point D de D_i à D_f avec $0 \leq k \leq 3.n$.

On suppose que les listes X et Y contiennent les coordonnées x_k et y_k du trajet du point D entre D_i à D_f . Pour chaque couple de coordonnées cartésiennes, on cherche à déterminer le couple de coordonnées articulaires correspondant (θ_{10} et θ_{20}). Dans ce but, on définit la fonction f_{20} par l'équation (B.2) :

$$f_{20}(\theta_{20}) = (x + a - d - b \cdot \cos(\theta_{20}))^2 + (y - b \cdot \sin(\theta_{20}))^2 - c^2 \quad (\text{B.2})$$

Pour x et y donnés, afin de satisfaire l'équation (B.1), il s'agit de déterminer θ_{20} tel que $f_{20}(\theta_{20}) = 0$. En procédant de même avec l'équation obtenue à la **Q12**, on obtient les coordonnées articulaires (qui pilotent le mouvement) en fonction des coordonnées cartésiennes (objectif du mouvement).

Pour résoudre l'équation $f_{20}(\theta_{20}) = 0$, on souhaite utiliser une méthode par dichotomie.

Q14- Écrire une fonction `dichotomie(f, xg, xd, eps=10**-8)` pour laquelle f est une fonction dont on cherche le zéro entre xg et xd avec eps la tolérance pour un critère d'arrêt de l'algorithme sur les antécédents.

La **Figure 25** présente la simulation numérique des évolutions des angles θ_{10} et θ_{20} .

B.3 Étude dynamique de la structure 2D

Objectif : Déterminer les caractéristiques moteur nécessaires pour satisfaire le cahier des charges.

Sur la **Figure 25** présentant la simulation numérique des évolutions des angles liés aux bras principaux avec le bâti, on constate que ces évolutions sont linéaires lors des mouvements verticaux. On considérera donc dans la suite que lors des mouvements verticaux de pick-and-place, si la vitesse de la charge est constante alors celle des moteurs le sera également.

B.3.1 — Simplification du modèle cinématique et des notations

Dans toute cette partie, le problème est plan de normale \vec{z}_0 et le schéma cinématique de référence du Robot Delta est celui de la **Figure 16** comme précisé **Partie B.2.1 —**. Ainsi les torseurs cinématiques du mouvement de i par rapport à j et des actions transmissibles de i sur j , réduits au point A pourront s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i/j} &= {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(i/j)} \\ \vec{V}_{(A, i/j)} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} - & u_{ij} \\ - & v_{ij} \\ \omega_{ij} & - \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \omega_{ij} \cdot \vec{z}_0 \\ u_{ij} \cdot \vec{x} + v_{ij} \cdot \vec{y} \end{array} \right\} \\ \mathcal{F}_{i \rightarrow j} &= {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{(A, i \rightarrow j)} \end{array} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} X_{ij} \cdot \vec{x} + Y_{ij} \cdot \vec{y} \\ N_{ij} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

B.3.2 — Hypothèses sur les masses et inerties

On considère le bâti 0 comme fixe et on lui associe le repère \mathcal{R}_0 supposé galiléen. Les repères associés aux solides 0 à 5 sont données **Annexe A.3.3 —**. On néglige les effets d'inerties des bras secondaires en comparaison aux efforts qu'ils transmettent.

Q15- Donner les hypothèses qui peuvent conduire à considérer comme nuls les produits d'inerties I_{yx} et I_{yz} des opérateurs d'inertie des bras principaux 1 et 2, donnés dans le **Tableau 4**.

B.3.3 — Étude des sollicitations dynamiques en rotation des bras principaux

On se place cette étude dans le cas du déplacement du plateau 5 mis en mouvement par les rotations des bras principaux 1 et 2. On donne le torseur cinématique du mouvement du plateau 5 par rapport au repère de référence \mathcal{R}_0 : $\mathcal{V}_{5/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\vec{0}}{\underset{G_5}{\frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0}} \end{array} \right\}$.

Partant d'un déplacement souhaité du plateau 5 par rapport au bâti, l'étude dynamique qui suit a pour but de déterminer les couples moteurs à imposer pour réaliser le mouvement.

Q16- Déterminer au point D , l'expression du torseur dynamique du plateau 5 dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

Q17- En isolant le système approprié, justifier que le torseur modélisant les actions mécaniques de la bielle 6 sur le plateau 5 ($\mathcal{F}_{6 \rightarrow 5}$) est un glisseur d'axe (E, \vec{x}_3).

Q18- En isolant le système approprié et en remarquant que le mécanisme est plan, justifier que le torseur modélisant les actions mécaniques du bras secondaire 4 sur le plateau 5 ($\mathcal{F}_{4 \rightarrow 5}$) est un glisseur d'axe (C_2, \vec{x}_4).

De même, on peut montrer que le torseur modélisant les actions mécaniques du bras secondaire 3 sur le plateau 5 ($\mathcal{F}_{3 \rightarrow 5}$) est un glisseur d'axe (C_1, \vec{x}_3).

En absence de charge sur le plateau 5, ce dernier est soumis à quatre actions mécaniques :

- action de la bielle 6 sur le plateau 5 : $\mathcal{F}_{6 \rightarrow 5} = \left\{ \begin{array}{l} F_{65} \cdot \vec{x}_3 \\ \overset{\vec{0}}{E} \end{array} \right\}$
- action du bras secondaire 3 sur le plateau 5 : $\mathcal{F}_{3 \rightarrow 5} = \left\{ \begin{array}{l} F_{35} \cdot \vec{x}_3 \\ \overset{\vec{0}}{C_1} \end{array} \right\}$
- action du bras secondaire 4 sur le plateau 5 : $\mathcal{F}_{4 \rightarrow 5} = \left\{ \begin{array}{l} F_{45} \cdot \vec{x}_4 \\ \overset{\vec{0}}{C_2} \end{array} \right\}$
- action de la pesanteur sur le plateau 5 : $\mathcal{F}_{g \rightarrow 5} = \left\{ \begin{array}{l} -m_5 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \overset{\vec{0}}{G_5} \end{array} \right\}$

Q19- En se limitant exclusivement à l'utilisation du théorème de la résultante dynamique ou du théorème du moment dynamique, déterminer la stratégie permettant d'obtenir :

- une équation scalaire permettant de déterminer F_{45} en fonction de l'action de la pesanteur sur le plateau 5 et de paramètres cinématiques (sans F_{35} et F_{65}) ;
- deux équations scalaires liant F_{35} et F_{65} en fonction de l'action de la pesanteur sur le plateau 5 et de paramètres cinématiques (sans F_{45}).

Après résolution du système d'équations précédent, on considère connus F_{45} , F_{35} et F_{65} .

Q20- Déterminer la projection sur \vec{z}_0 du moment dynamique du bras principal 2 ($\vec{\delta}_{(A_2, 2/0)} \cdot \vec{z}_0$), dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 , exprimé au point A_2 .

Les bras principaux sont mis en mouvement par des moteurs synchrones (Figure 15) et on appelle C_{r1} (resp. C_{r2}) le couple exercé en sortie du réducteur 1 (resp. 2) sur le bras principal 1 (resp. 2).

Q21- Déterminer l'expression de C_{r2} en fonction de F_{45} , $\ddot{\theta}_{20}$, θ_{40} , θ_{20} , de l'action de la pesanteur et de paramètres géométriques constants.

Puisque F_{45} est déterminé en fonction des actions de la pesanteur et des paramètres cinématiques liés au mouvement imposé du plateau 5 par rapport au bâti, la question précédente permet donc de déterminer C_{r2} (et donc le couple moteur C_{m2}) pour un mouvement donné. Une étude similaire mais plus longue permet de déterminer C_{m1} le couple du moteur associé au bras principal 1 à imposer pour générer le mouvement désiré du plateau 5 par rapport au bâti.

C.1 Modélisation de la chaîne d'énergie**C.1.1 — Recherche de l'inertie équivalente**

Objectif : Déterminer l'inertie équivalente sur l'arbre moteur.

Pour l'étude de la régulation en position des bras principaux assurant le positionnement du plateau 5, il convient d'estimer l'inertie équivalente sur les arbres des moteurs dont les caractéristiques sont données **Tableau 5** en **Annexe E.1**.

Pour un calcul très approximatif de l'inertie équivalente J_{eq} , exprimée sur l'arbre moteur 1, on considère que le plateau 5 et son chargement se modélisent par deux masses ponctuelle en B_1 (hypothèse très simplificatrice), m_5 la masse du plateau 5 et m_c la masse de son chargement. On note J_{bmot} , l'inertie de l'arbre moteur (avec son frein), J_r , l'inertie du réducteur (ramené sur l'arbre moteur), r , le coefficient de réduction et enfin C_p , le moment d'inertie du bras principal 1 autour de l'axe (A_1, \vec{Z}_0).

Q22- Déterminer l'expression littérale de J_{eq} , l'inertie équivalente sur l'arbre moteur 1, de l'ensemble décrit ci-dessus (qu'on notera, si besoin, Σ), en mouvement dans le repère galiléen lié au bâti.

Remarque : $\overrightarrow{A_1B_1} = b \cdot \vec{x}_1$ d'après **Annexe A.3.1** —.

La plateau 5 est munie d'une ventouse FESTO ESG-30-BN-HA-QS (donc de diamètre 30 mm) permettant de saisir des objets. La documentation constructeur associée est donnée **Tableau 1**.

General technical data – Suction cup S/E/B/C/G		Technical data → Internet: ess			
Suction cup shape		Suction cup Ø [mm]	20	30	40
B – round, bellows 1.5 convolutions: material NBR, VMQ (silicone), PUR, Vulkollan® (technical values in brackets)					
	Connection suction cup holder	M6	M6	M6	M6
Nominal width	[mm]	3	3	3 (2.5)	3 (2.5)
Holding force at nominal operating pressure –0.7 bar	[N]	12.9	26.2	52.3 (59)	72.6 (100)
Suction cup volume	[cm³]	1.6	4.07	8.87 (9.8)	14.23 (17.6)
Min. workpiece radius	[mm]	40	80	90 (35)	150 (40)
Height compensator	[mm]	6	8	9.5 (9)	11 (10)
Weight	[g]	6.7	9.9	18.7 (18)	24.7 (24)

Tableau 1 – Documentation constructeur FEMTO ESG-30-BN-HA-QS

Q23- Déterminer la masse maximale de la charge m_c qu'il est possible de maintenir avec une dépression de 0,7 bar.

Pour les calculs dynamiques qui suivent, on prendra $m_c = 2,5$ kg, $J_r = 0,5 \cdot 10^{-4}$ kg.m², $C_p = 0,2$ kg.m² et $r = 5$.

Q24- La plateau 5 ayant une masse $m_5 = 500$ g, déterminer l'ordre de grandeur de J_{eq} avec un chiffre significatif.

Ce moteur est inconnu! Aucun problème, laissez-vous porter sans résistance...

C.1.2 — Modèle à deux phases du moteur synchrone à aimants permanents

Le comportement du moteur synchrone à aimants permanents peut être modélisé suite à une transformation triphasé/diphasé par les équations suivantes :

- équations électriques :

$$v_d(t) = R.i_d(t) + \frac{d\varphi_d(t)}{dt} - n_p.\omega_m(t).\varphi_q(t) \quad (C.1)$$

$$v_q(t) = R.i_q(t) + \frac{d\varphi_q(t)}{dt} + n_p.\omega_m(t).\varphi_d(t) \quad (C.2)$$

$$\varphi_d(t) = L.i_d(t) + \varphi_f \quad (C.3)$$

$$\varphi_q(t) = L.i_q(t) \quad (C.4)$$

$$C_m(t) = n_p.\varphi_f.i_q(t) \quad (C.5)$$

- équation mécanique avec $f_v = 0 \text{ N.m.rad}^{-1}.\text{s}$ jusqu'à la Partie C.2.3.1 — :

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f_v \cdot \omega_m(t) \quad (C.6)$$

- $v_d(t)$ et $v_q(t)$, les composantes des tensions statoriques dans le repère dq ;
- $i_d(t)$ et $i_q(t)$, les composantes des courants statoriques ;
- $\varphi_d(t)$ et $\varphi_q(t)$, les composantes des flux statoriques ;
- $\omega_m(t)$, la vitesse angulaire du moteur ;
- $C_m(t)$, le couple moteur ;
- $C_r(t)$, le couple résistant appliqué sur l'axe du moteur.

Dans la phase de montée verticale du mouvement de pick-and-place (voir **Figure 7 - page 8**) et pour une masse $M = m_c + m_5 = 3 \text{ kg}$ au bout des bras :

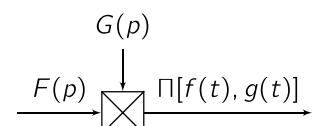
- $C_{rmax} = 2,2 \text{ N.m}$ (couple max en régime établi) ;
- $\omega_m = 22,5 \text{ rad.s}^{-1}$ (correspond à une vitesse linéaire de la charge d'environ $V_{lin} = 1 \text{ m.s}^{-1}$).

On donne et rappelle (voir **Tableau 5** en **Annexe E.1**) que :

- $R = 6,8 \Omega$, la résistance d'un enroulement ;
- $L = 36,5 \text{ mH}$, l'inductance cyclique statorique ;
- $\varphi_f = 260 \text{ mWb}$, le flux rotorique ;
- $n_p = 3$, le nombre de paires de pôles ;
- $r = 5$, le coefficient de réduction ;
- f_v , le frottement visqueux sur l'arbre moteur, considéré **nul** jusqu'à la Partie C.2.3.1 — ;
- $J_{eq} = 0,02 \text{ kg.m}^2$, le moment d'inertie équivalent ramené sur l'axe moteur par rapport à son axe de rotation (valeur de sécurité indépendante du résultat de la **Q24**).

Pour simuler numériquement le modèle, on place les équations (C.1) à (C.6) dans le domaine de Laplace.

On note alors $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, la transformée de Laplace de la fonction f . Comme $\mathcal{L}[f(t).g(t)] \neq F(p).G(p)$, on utilisera l'opérateur Π tel que $\mathcal{L}[f(t).g(t)] = \Pi[f(t), g(t)]$ et qui sera représenté comme ci-contre dans un schéma bloc.



Remarque : on notera également $\mathcal{L}[\omega_m(t)] = \Omega_m(p)$ et $\mathcal{L}[\varphi_x] = \Phi_x(p)$.

Q25- A partir des équations (C.1) à (C.4), donner les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$ en fonction de $i_d(t)$, $i_q(t)$ et $\omega_m(t)$ ainsi que des paramètres R , L et φ_f .

Q26- Avec les notations précédentes et en se plaçant dans les conditions d'Heaviside, déterminer les transformées de Laplace des équations (C.5) à (C.6) et les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$ déterminées en **Q25**. Compléter le schéma bloc du cahier réponses.

C.1.3 — Validation du modèle

Lors du mouvement vertical ascendant du déplacement de pick-and-place, on considère que le couple résistant maximal vaut $C_{rmax} = 2,2 \text{ N.m}$ et que la vitesse de rotation souhaitée du moteur en régime permanent est $\omega_{mmax} = 22,5 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Q27-** A partir des équations (C.5) et (C.6), déterminer numériquement la valeur du courant $i_{q\infty}$ en régime permanent.

On pose : $V(t) = v_d(t) + j.v_q(t)$.

La stratégie de commande du moteur pour un point de fonctionnement consiste à avoir $i_d = 0$ et $i_q \neq 0$ en fonction du couple souhaité. Cela constituera l'objectif de la partie suivante.

- Q28-** A partir des équations obtenues à la **Q25**, en appliquant la stratégie de commande du moteur, déterminer, en fonction de R , L , n_p , ω_{mmax} , φ_f et $i_{q\infty}$, les expressions de $v_{d\infty}$ et $v_{q\infty}$ correspondant aux tensions v_d et v_q en régime permanent.

- Q29-** Déterminer les valeurs numériques de $v_{d\infty}$ et $v_{q\infty}$. En déduire V_∞ , la valeur de $|V(t)|$ en régime permanent.

Une simulation numérique a permis de tracer les réponses temporelles (voir figure du cahier réponse en **Q30**) en appliquant en entrée les tensions $v_{d\infty}$ et $v_{q\infty}$ déterminées en **Q28**.

- Q30-** A partir des résultats précédents et de la simulation numérique donnée dans le cahier réponse, indiquer, en détaillant la réponse, si le modèle peut être validé.

C.2 Modélisation du comportement de la commande

C.2.1 Découplage de la commande

La commande vectorielle, consiste à régler le flux par une composante du courant et le couple par l'autre composante. Ainsi, appliquée à la machine synchrone, elle consiste à imposer une référence du courant direct i_d nulle ($i_{dref} = 0$) et à réguler la vitesse ou la position par le courant i_q . Elle permet de simplifier la commande du couple par la linéarisation de la relation entre le couple et le courant. Physiquement, cette stratégie revient à maintenir le flux de réaction d'induit en quadrature avec le flux rotorique φ_f produit par les aimants permanents.

Les équations traduisant le comportement du moteur synchrone à aimants permanents montrent que les deux composantes de courant $i_d(t)$ et $i_q(t)$ dépendent simultanément des composantes de tension $v_d(t)$ et $v_q(t)$. Pour découpler l'évolution des courants $i_d(t)$ et $i_q(t)$, on applique une méthode de compensation en introduisant deux nouvelles variables $v'_d(t)$ et $v'_q(t)$ tels que :

$$v'_d(t) = v_d(t) + n_p \cdot \omega_m(t) \cdot L \cdot i_q(t) \quad (\text{C.7})$$

$$v'_q(t) = v_q(t) - n_p \cdot \omega_m(t) \cdot (L \cdot i_d(t) + \varphi_f) \quad (\text{C.8})$$

- Q31-** A partir des équations (C.1) à (C.4) et des équations (C.7) et (C.8), donner les expressions des variables $v'_d(t)$ et $v'_q(t)$ en fonction de $i_d(t)$, $i_q(t)$ et des paramètres R , L .

- Q32-** Montrer que l'on peut mettre les fonctions de transfert H_d et H_q , définies par $H_d(p) = \frac{i_d(p)}{V'_d(p)}$ et $H_q(p) = \frac{i_q(p)}{V'_q(p)}$ sous la forme : $H_d(p) = H_q(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$.
Donner les expressions de K et T en fonction de R et L .

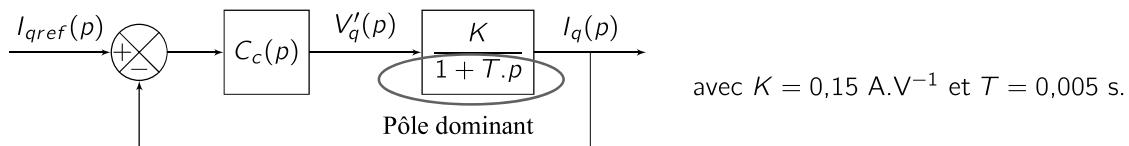
C.2.2 — Régulation de courant

Le **Tableau 2** précise les exigences imposées pour maîtriser le courant dans les enroulements et ainsi réguler les accélérations des bras du Robot Delta.

Exigence	N°	Critères d'appréciation	Niveau
Précision	1.1	Erreur statique en réponse à un échelon	Nulle
Rapidité	1.2	Temps de réponse à 5% en réponse à un échelon	$\leq 0,005 \text{ s}$
Stabilité	1.2	Dépassement en réponse à un échelon	Aucun

Tableau 2 – Exigences en courant relatives au suivi de trajectoire

Le schéma bloc ci-après modélise le comportement de la boucle de courant pour l'axe de quadrature q avec un correcteur de fonction de transfert $C_c(p)$:



Q33- Justifier en quoi un correcteur proportionnel ne peut convenir.

On choisit un correcteur proportionnel intégral tel que : $C_c(p) = K_p \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$

Q34- Quelle doit être la valeur de T_i si on souhaite compenser le pôle dominant ? Déterminer la valeur de K_p pour répondre à l'exigence de rapidité.

La courbe **Q35** du cahier réponse donne une simulation de l'évolution de i_q en fonction du temps, en réponse à un échelon de consigne $i_{qref}(t) = I_0 \cdot u(t)$ avec $I_0 = 1 \text{ A}$.

Q35- A partir de la réponse temporelle donnée dans le cahier réponse, déterminer si le réglage du correcteur permet de valider le cahier des charges.

C.2.3 — Régulation de vitesse

Pour garantir la coordination des bras principaux pour le mouvement de pick-and-place, l'asservissement de vitesse doit respecter les exigences listées dans le **Tableau 3**.

Exigence	N°	Critères d'appréciation	Niveau
Précision	2.1.1	Erreur statique en réponse à une consigne en échelon	Nulle
	2.1.2	Erreur statique en réponse à une perturbation en échelon	Nulle
Rapidité	2.2	Temps de réponse à 5% en réponse à un échelon	$\leq 0,6 \text{ s}$
Stabilité	2.3.1	Marge de gain	$\geq 10 \text{ dB}$
	2.3.2	Marge de phase	$\geq 45^\circ$

Tableau 3 – Exigences en vitesse relatives au suivi de trajectoire

Dans ce cadre de la régulation de vitesse des axes moteurs, on adopte le schéma bloc de la **Figure 8** où $\omega_c(t)$ désigne la consigne de vitesse, $C_v(p)$ la fonction de transfert du correcteur de vitesse et $B_c(p)$ représente la fonction de transfert de l'asservissement de courant.

Q36- En justifiant la réponse, déterminer ce qui peut amener à approximer $B_c(p)$ à un bloc unitaire ($B_c(p) = 1$).

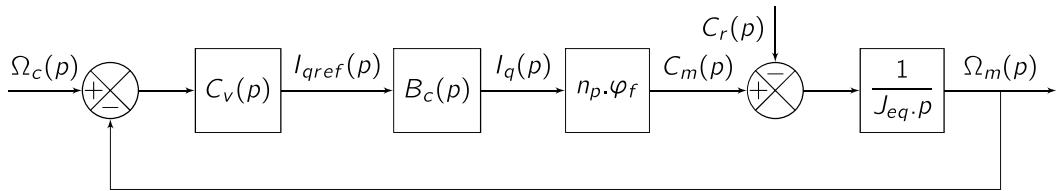


Figure 8 – Schéma bloc de la régulation de vitesse d'un des moteurs

Dans la suite du sujet, on considère que $B_c(p) = 1$.

5/2

- **Q37-** Pour garantir les critères de précision, en justifiant la réponse, déterminer la classe minimale à imposer au correcteur C_v .

C.2.3.1 — Correction intégrale

Dans un premier temps, une correction intégrale est implémentée dans le schéma bloc : $C_v(p) = \frac{K_v}{p}$.

Au niveau de l'équation (C.6), considérer le frottement visqueux f_v comme non nul conduit au schéma bloc présenté **Figure 9** :

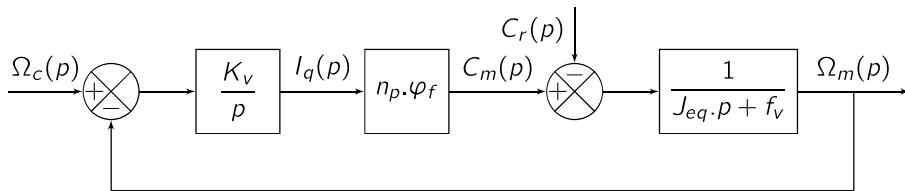


Figure 9 – Schéma bloc de la régulation de vitesse d'un des moteurs avec un correcteur proportionnel et un modèle de frottement visqueux

- **Q38-** Justifier que si le frottement visqueux f_v est nul ($f_v = 0$) alors la régulation de vitesse est instable et que s'il ne l'est pas ($f_v > 0$), la régulation de vitesse est stable.

Remarque : pour les applications numériques, on prendra $f_v = 10^{-4}$ N.m.rad⁻¹.s.

Méthode 3/2: on pourra calculer la FTBF

5/2

- **Q39-** Déterminer l'expression de K_v pour obtenir une marge de phase conforme à celle préconisée par le cahier des charges.

- **Q40-** Déterminer l'expression de K_v pour rendre le système le plus rapide sans dépassement et en déduire le temps de réponse à 5% approximatif avec ce réglage de K_v . Conclure quant au cahier des charges.

On prendra t5% = 5/ω₀

C.2.3.2 — Correction proportionnelle intégrale

On pose $C_v(p) = K_v \cdot \left(1 + \frac{1}{T_v \cdot p}\right)$ et on néglige à nouveau le frottement visqueux.

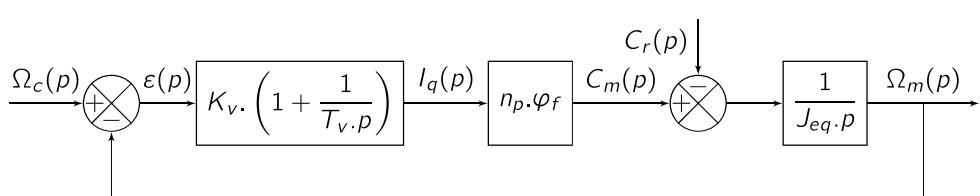


Figure 10 – Régulation de vitesse avec un correcteur à action proportionnelle et intégrale

5/2

Q41- Déterminer les conditions sur K_v et T_v pour que le système soit stable en boucle fermée.

Q42- A partir des diagrammes de Bode donnés dans le document réponse pour $K_v = 1 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$ et $T_v = 0,1 \text{ s}$, déterminer approximativement la valeur minimale (en dB) à imposer à K_v , sans modifier T_v , pour que la marge de gain et la marge de phase vérifient le cahier des charges de cet asservissement de vitesse.

Une simulation numérique est donnée **Figure 11** et permet de connaître, en réponse à un échelon d'amplitude $22,5 \text{ rad.s}^{-1}$, l'évolution du courant, de la vitesse de rotation du moteur et de l'erreur statique, avec comme réglage de correcteur $K_v = 1 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$ et $T_v = 0,1 \text{ s}$.

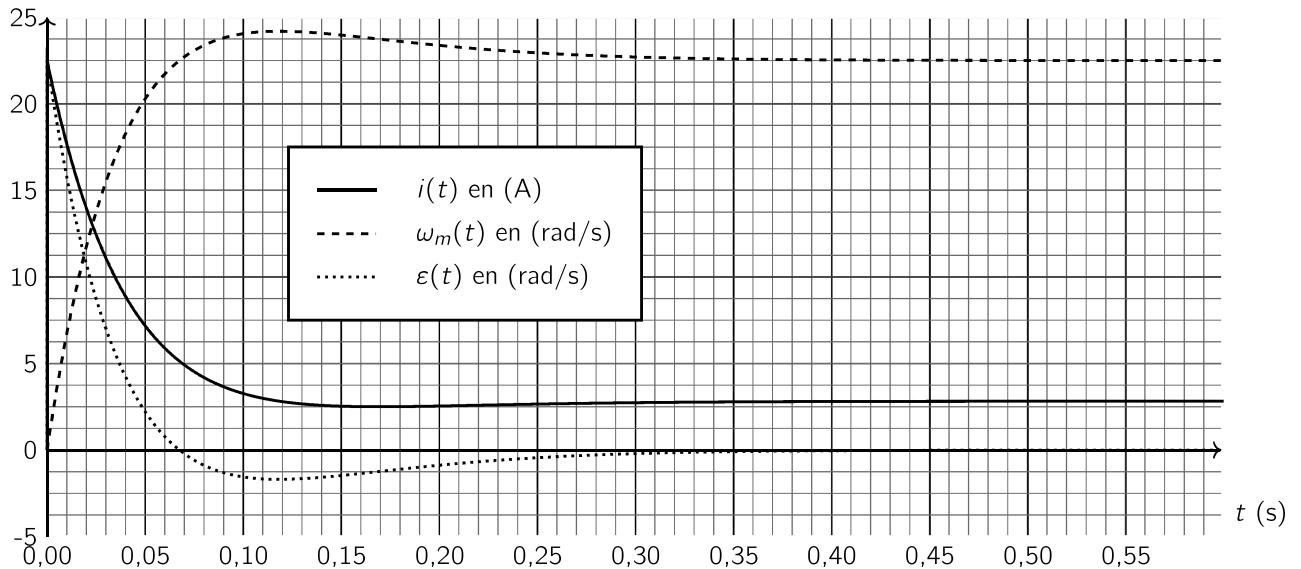


Figure 11 – Simulation de l'asservissement de vitesse en réponse à un échelon de $22,5 \text{ rad.s}^{-1}$

La courbe de la **Figure 11** présente un pic de courant supérieur à 20 A , ce qui est néfaste au moteur et à la structure du Robot Delta. On cherche donc à ajuster la valeur de K_v pour réduire le pic de courant.

Q43- Grâce aux simulations données dans le cahier réponse, déterminer la valeur de K_v permettant de respecter le cahier des charges (pour $T_v = 0,1 \text{ s}$). Donner la valeur correspondante du pic de courant.

5/2

C.2.3.3 — Correction proportionnelle intégrale avec saturation de courant et système anti emballement

Dans cette partie, on adopte un bloc de saturation de courant avec une boucle anti emballement (anti-windup) comme définie sur le schéma bloc de la **Figure 12**. En absence de saturation de courant, le schéma bloc est équivalent à celui de la **Figure 10**.

Afin de doper la montée en vitesse avec une saturation de courant, on pose $K_v = 1 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$. On peut donc considérer que dans la première partie de la phase d'accélération, il y a saturation de courant et le schéma bloc se limite au schéma de la **Figure 13** avec en entrée $i_q(t) = I_{max} \cdot u(t)$.

Q44- Déterminer l'expression du temps t_{95} pour atteindre 95% de la vitesse maximale du moteur $\omega_{mmax} = 22,5 \text{ rad/s}$ lorsqu'il y a saturation de courant avec $i_q(t) = I_{max} \cdot u(t)$ et un couple résistant $C_r(t) = C_{rmax} \cdot u(t)$ où $C_{rmax} = 2,2 \text{ N.m}$. Déterminer alors la valeur de I_{max} permettant de respecter le cahier des charges.

Indépendamment du résultat trouvé à la question précédente, une simulation numérique est faite en prenant $K_v = 1,3 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$, $T_v = 0,1 \text{ s}$ et $I_{max} = 5 \text{ A}$ (voir **Figure 14**).

Q45- Conclure quant au cahier des charges.

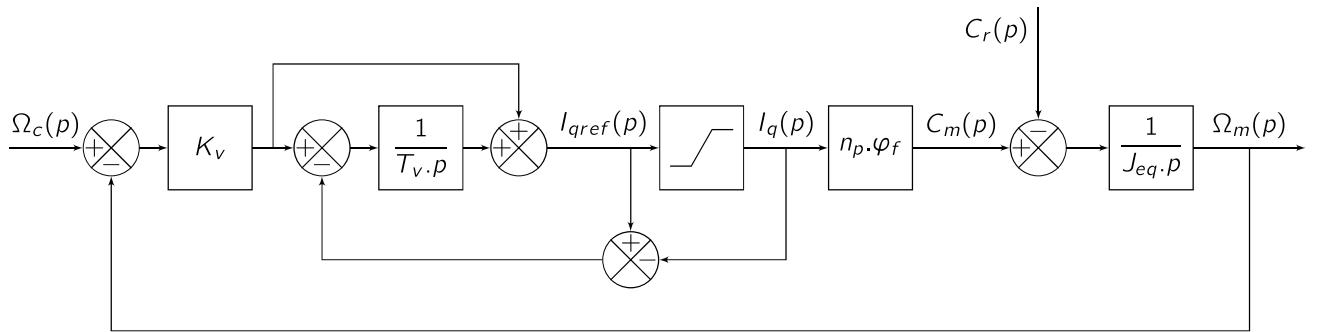


Figure 12 – Régulation de vitesse avec limite de courant et système anti-emballement

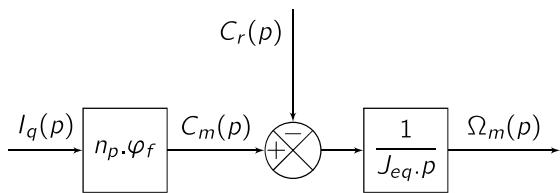


Figure 13 – Montée en vitesse sous saturation de courant

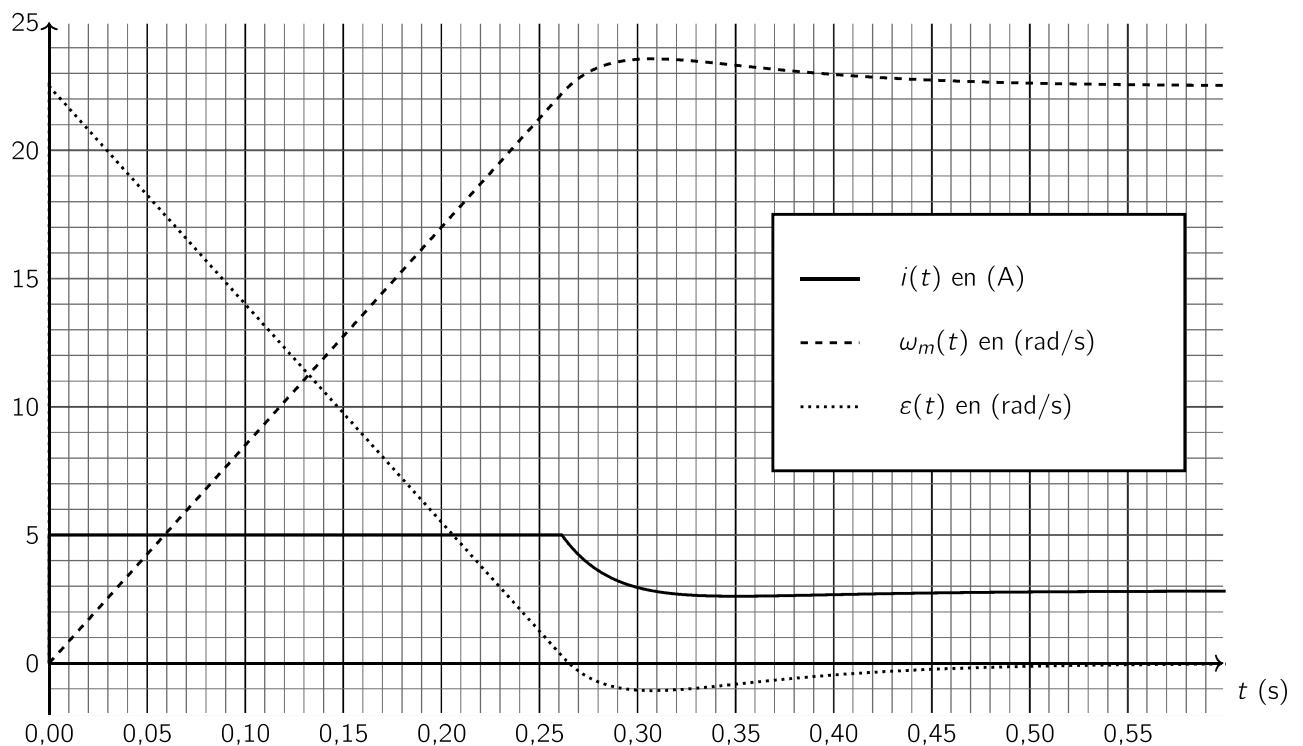


Figure 14 – Simulation de l'asservissement de vitesse en réponse à un échelon de $22,5 \text{ rad.s}^{-1}$ avec correction proportionnelle intégrale, bloc de saturation et système anti-emballement.

Fin de l'énoncé