

Composition de Mathématiques

Le 17 décembre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices et les objets connectés sont interdits.

On rappelle qu'une matrice $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est **nilpotente d'indice** $p \in \mathbb{N}^*$ si, et seulement si, p est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0_n$.

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'**exponentielle** de A est la matrice, notée $\exp(A)$ ou e^A , définie comme la somme d'une série de matrices :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

On rappelle que : si deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ commutent :

$$AB = BA,$$

alors

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre complexe λ , on appelle **bloc de Jordan d'ordre n associé à λ** la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \lambda & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Partie A. Préliminaires en dimension 1

1. Soient r et R , des nombres réels strictement positifs ; α et θ , des nombres réels. On pose $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Démontrer que

$$ze^z = w \iff \begin{cases} Re^{R \cos \theta} = r \\ R \sin \theta = \alpha - \theta \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

On suppose dorénavant que

$$2\pi \leq \alpha < 4\pi$$

et on considère l'application $\varphi :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall 0 < \theta < \pi, \quad \varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin \theta} \exp\left[(\alpha - \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right].$$

2. Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque θ tend vers 0 (par valeurs supérieures) et vers π (par valeurs inférieures).

Que peut-on en déduire sur l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

On pose

$$D = \{Re^{i\theta}, (R, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\} \cup \{0\}$$

et on considère l'application $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in D, \quad g(z) = ze^z.$$

3. Démontrer que g est surjective.

Partie B. Représentation d'un bloc de Jordan

- ♣ Soit $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice nilpotente d'indice n .
 4. Démontrer qu'il existe une colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille

$$(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$$

est libre.

5. En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.
 6. Démontrer que la matrice $\exp[J_n(0)]$ est inversible et que $J_n(0) \exp[J_n(0)]$ est nilpotente d'indice n .
 7. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$Pe^A P^{-1} = \exp[PAP^{-1}].$$

En déduire qu'il existe une matrice $N_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J_n(0) = N_0 e^{N_0}.$$

- ♣ Soit λ , un nombre complexe *non nul*.
 8. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et qu'il existe un polynôme à coefficients complexes P (qui dépend éventuellement de μ) tel que

$$J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} = \lambda \cdot I_n + (\mu + 1) e^\mu \cdot J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)).$$

9. Démontrer que la matrice

$$(\mu + 1) e^\mu \cdot J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0))$$

est nilpotente d'indice n . En déduire qu'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$J_n(\lambda) = M e^M.$$

Partie C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

|| Dans cette partie, on considère une matrice $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p . On suppose dans un premier temps que

$$1 < p < n.$$

10. Démontrer qu'il existe deux matrices

$$B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{C})$$

telles que la matrice N soit semblable à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

11. Pour $X \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice suivante :

$$T_X = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Démontrer que la matrice T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que la matrice A' définie par

$$A' = T_X A T_X^{-1}$$

est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_p(0) & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

On explicitera les matrices $Y \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{C})$.

12. Démontrer qu'on peut choisir $X \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que, dans la matrice A' , toutes les lignes de Y soient nulles à l'exception éventuelle de la dernière.

☞ Pour $1 \leq i \leq p$, on pourra noter $X_{(i)}$, la i -ème ligne de la matrice X et comparer le produit $J_p(0)X$ à X .

13. Démontrer que A' est nilpotente d'indice p . En déduire que, si la matrice X est choisie comme dans la question [12.], alors la matrice Y est nulle.

☞ On pourra raisonner par l'absurde, en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

14. Pour $1 \leq p \leq n$, démontrer que la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs

$$\text{Diag}(J_{p_1}(0), J_{p_2}(0), \dots, J_{p_r}(0))$$

où $r, p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

Partie D. Représentation Ae^A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes *distinctes* et on suppose que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où les α_k sont des entiers naturels non nuls.

On note f , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on considère les sous-espaces vectoriels

$$\forall 1 \leq k \leq s, \quad F_k = \text{Ker}[(f - \lambda_k I)^{\alpha_k}] \subset \mathbb{C}^n.$$

15. Démontrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^s F_k$$

En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, démontrer que la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs

$$\text{Diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2, \dots, \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s)$$

où les matrices $N_1, N_2, \dots, N_s$ sont nilpotentes.

16. Démontrer que l'application $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = M \exp(M)$$

est surjective.



Extraits du rapport du jury

Recommandations

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et de mettre en valeur les résultats obtenus.

À propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape.

En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part, de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié. En revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.

Quelques erreurs fréquemment commises

2. — Beaucoup d'erreurs : les limites ne sont pas justifiées, voire fausses.

4. — Question classique, la rédaction est souvent imprécise.

5. — Question sélective. On rencontre la confusion entre *matrices semblables* et *matrices équivalentes*.

6. — De nombreux candidats se limitent à démontrer l'inversibilité.

8. — Question assez souvent omise, la rédaction est très inégale.

9. — Question peu traitée.

12, 13. — Les questions les plus difficiles du problème, les très bons candidats s'y sont illustrés.

14. — La rédaction de la récurrence est souvent très décevante.

15. — L'égalité $\dim F_k = \alpha_k$ est rarement justifiée.

Solution * Représentation matricielle Ae^A

Partie A. Préliminaires en dimension 1

1. Par définition de z ,

$$ze^z = Re^{R \cos \theta} \cdot e^{i(\theta + R \sin \theta)} \quad \text{où} \quad Re^{R \cos \theta} \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \theta + R \sin \theta \in \mathbb{R}.$$

Par unicité de la représentation trigonométrique d'un nombre complexe non nul, $ze^z = re^{i\alpha}$ si, et seulement si, $Re^{R \cos \theta} = r$ et $\theta + R \sin \theta = \alpha \pmod{2\pi}$.

2. Comme $\alpha \geq 2\pi$, la différence $\alpha - \theta$ tend vers une limite strictement positive lorsque θ tend vers 0 ou vers π . D'autre part, $\sin \theta$ tend vers 0 par valeurs positives lorsque θ tend vers 0^+ ou vers π^- . Donc

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\alpha - \theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha - \theta}{\sin \theta} = +\infty.$$

• Comme $\cos \theta$ tend vers 1 lorsque θ tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varphi(\theta) = +\infty.$$

• Comme $\cos \theta$ tend vers -1 lorsque θ tend vers π , on en déduit que

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \varphi(\theta) = - \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\alpha - \theta}{\sin \theta} \cos \theta \exp \left[\frac{\alpha - \theta}{\sin \theta} \cos \theta \right] = 0$$

par composition de limites (on sait que ue^u tend vers 0 lorsque u tend vers $-\infty$).

• La fonction φ étant clairement continue sur l'intervalle $]0, \pi[$, on déduit du Théorème des valeurs intermédiaires que l'image par φ de l'intervalle $]0, \pi[$ contient l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $r > 0$, l'équation $\varphi(\theta) = r$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, \pi[$.

3. Commençons par le cas particulier évident : $0 \in D$ et $g(0) = 0$, donc le nombre complexe 0 admet au moins un antécédent dans D par g .

• Considérons maintenant un nombre complexe $w \neq 0$: son module r est strictement positif et on peut choisir une détermination α de son argument dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$.

D'après [2.], il existe au moins un réel $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$. Le nombre réel R défini par

$$R = \frac{\alpha - \theta}{\sin \theta}$$

est alors strictement positif (puisque $\alpha - \theta \geq 2\pi - \pi$ et $\sin \theta > 0$), donc le complexe $z = Re^{i\theta}$ appartient bien à D .

|| L'ensemble D est l'union du demi-plan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ et de l'origine $\{0\}$.

Comme

$$R \sin \theta = \alpha - \theta \quad \text{et} \quad Re^{R \cos \theta} r,$$

on déduit de [1.] que le nombre complexe z vérifie $g(z) = w$.

• On a ainsi démontré que l'application $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ est surjective.

Partie B. Représentation d'un bloc de Jordan

4. Comme l'indice de nilpotence de N est égal à n , la matrice N^{n-1} n'est pas la matrice nulle. Par conséquent, il existe au moins une colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$.

• La colonne X étant choisie de telle sorte que $N^{n-1}X \neq 0$, nous allons démontrer par l'absurde que la famille $(N^k X)_{0 \leq k < n}$ est libre. On considère donc une relation de liaison :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k N^k X = 0 \tag{1}$$

en supposant qu'un des scalaires α_k (au moins) n'est pas nul.

L'ensemble

$$\mathcal{N} = \{0 \leq k < n : \alpha_k \neq 0\}$$

est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet par conséquent un plus petit élément n_0 (Axiome de bon ordre). Ainsi,

$$\forall 0 \leq k < n_0, \quad \alpha_k = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{n_0} \neq 0.$$

La relation de liaison (1) peut donc se simplifier :

$$\alpha_{n_0} N^{n_0} X + \sum_{n_0 < k < n} \alpha_k N^k X = 0. \quad (2)$$

Comme $n_0 \in \mathcal{N}$, on a bien $n_0 < n$, donc $(n-1) - n_0 \in \mathbb{N}$ (inégalité stricte entre deux entiers). On peut donc appliquer $N^{(n-1)-n_0}$ à la relation (2) et obtenir

$$\alpha_{n_0} N^{(n-1)-n_0} N^{n_0} X + \sum_{n_0 < k < n} \alpha_k N^{(n-1)+(k-n_0)} X = N^{(n-1)-n_0} 0 = 0.$$

Pour $k > n_0$, on a $k-1 \geq n_0$ (inégalité stricte entre deux entiers), donc

$$(n-1) + (k-n_0) = n + \underbrace{(k-1-n_0)}_{\in \mathbb{N}}$$

et donc

$$0 = \alpha_{n_0} N^{n-1} X + \sum_{n_0 < k < n} \alpha_k N^{k-1-n_0} \underbrace{N^n X}_{=0} = \underbrace{\alpha_{n_0}}_{\neq 0} \underbrace{N^{n-1} X}_{\neq 0},$$

ce qui est absurde.

|| La matrice N est nilpotente et par conséquent, elle n'est pas inversible. Il faut donc vérifier **systématiquement** qu'on ne considère que des puissances positives de N .

5. Soit g , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

D'après [4.], il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $g^{n-1}(x) \neq 0$ et, pour un tel vecteur, la famille $(g^k(x))_{0 \leq k < n}$ est libre. C'est une famille libre de cardinal n dans un espace de dimension n , donc c'est en fait une base de $\mathbb{C}^n$.

La famille

$$\mathcal{B} = (g^{n-1}(x), g^{n-2}(x), \dots, g^2(x), g(x), x)$$

est donc aussi une base de $\mathbb{C}^n$ et la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est précisément la matrice $J_n(0)$.

|| Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs : dans la base $\mathcal{B}' = (x, g(x), \dots, g^{n-1}(x))$, la matrice de g n'est pas la matrice $J_n(0)$, mais sa transposée $J_n(0)^T$.
C'est le vecteur $g^{n-1}(x)$ qui est dans le noyau de g , pas le vecteur x !

Le même endomorphisme g étant représenté par les matrices N et $J_n(0)$ dans deux bases différentes de $\mathbb{C}^n$, on en déduit que les matrices N et $J_n(0)$ sont semblables.

6. Les matrices $A = J_n(0)$ et $B = -J_n(0)$ commutent, donc

$$\exp[J_n(0)] \exp[-J_n(0)] = \exp[-J_n(0)] \exp[J_n(0)] = \exp[J_n(0) - J_n(0)] = \exp(0_n)$$

d'après la propriété rappelée en préambule. Par définition de l'exponentielle,

$$\exp(0_n) = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{0_n^k}{k!} = I_n,$$

donc la matrice $\exp[J_n(0)]$ est inversible — et son inverse est $\exp[-J_n(0)]$.

|| On peut aussi remarquer que les puissances de $J_n(0)$ sont très simples à calculer et en déduire que

$$\exp[J_n(0)] = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad e_k = \frac{1}{k!}.$$

|| Une matrice triangulaire étant inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, il est alors clair que $\exp[J_n(0)]$ est inversible.

♣ D'après [5.], la matrice $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n (puisque'elle est semblable à la matrice N , qui est nilpotente d'indice n), donc

$$\exp[J_n(0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_n(0)^k}{k!} \in \mathbb{C}[J_n(0)].$$

En particulier, les matrices $J_n(0)$ et $\exp[J_n(0)]$ commutent.

|| Quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp(A)$ est un polynôme en A et commute à A (puisque la sous-algèbre $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A est commutative).
 || En effet, la sous-algèbre $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et, à ce titre, c'est une partie fermée. Toutes les sommes partielles de la série exponentielle sont des polynômes en A , donc la limite $\exp(A)$ des sommes partielles est encore un polynôme en A .

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(J_n(0) \exp[J_n(0)])^k = (J_n(0))^k (\exp[J_n(0)])^k = (J_n(0))^k \exp[kJ_n(0)].$$

Le facteur $\exp[kJ_n(0)]$ est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Le cofacteur $[J_n(0)]^k$ est non nul pour $k < n$ et nul pour $k = n$. Par conséquent, le produit est non nul pour $k < n$ et nul pour $k = n$. Donc $J_n(0) \exp[J_n(0)]$ est nilpotente d'indice n .

|| Un produit de matrices AB peut être nul sans qu'aucune des deux matrices soit nulle. En revanche, si la matrice B est inversible, alors le produit AB est la matrice nulle si, et seulement si, $A = 0$.

7. La conjugaison $[M \mapsto PMP^{-1}]$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$,

$$P \left(\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} = \sum_{k=0}^m \frac{(PAP^{-1})^k}{k!}.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\exp(PAP^{-1})$ (par définition de l'exponentielle de matrice). De même,

$$\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \exp(A)$$

et par composition de limites,

$$P \left(\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P \exp(A) P^{-1}$$

puisque la conjugaison $[M \mapsto PMP^{-1}]$, en tant qu'application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie, est continue.

Par unicité de la limite,

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad P e^A P^{-1} = \exp[PAP^{-1}].$$

• D'après [6.], la matrice $N = J_n(0) \exp[J_n(0)]$ est nilpotente d'indice n et d'après [5.], elle est semblable à la matrice $J_n(0)$. Il existe donc une matrice inversible P telle que

$$J_n(0) = PNP^{-1} = PJ_n(0)P^{-1} \cdot P \exp[J_n(0)]P^{-1} = PJ_n(0)P^{-1} \cdot \exp[PJ_n(0)P^{-1}]$$

d'après les calculs qui précèdent. En posant $N_0 = PJ_n(0)P^{-1}$, on a une matrice $N_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = N_0 e^{N_0}$.

8. D'après [3.], tout nombre complexe λ admet au moins un antécédent μ dans D par g . Or $-1 = e^{i\pi} \notin D$, donc $\mu \neq -1$.

• Par définition, $J_n(\mu) = \mu I_n + J_n(0)$. Comme les matrices μI_n et $J_n(0)$ commutent, on déduit de la propriété de morphisme rappelée en préambule que

$$\exp[J_n(\mu)] = \exp[\mu I_n] \exp[J_n(0)] = e^\mu \cdot \exp[J_n(0)]$$

et donc que

$$J_n(\mu) \exp[J_n(\mu)] = \mu e^\mu \cdot \exp[J_n(0)] + e^\mu \cdot J_n(0) \exp[J_n(0)] = \lambda \cdot \exp[J_n(0)] + e^\mu \cdot J_n(0) \exp[J_n(0)]. \quad (3)$$

D'après [5.], la matrice $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n , donc

$$\exp[J_n(0)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[J_n(0)]^k}{k!} = I_n + J_n(0) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{[J_n(0)]^k}{k!} = I_n + J_n(0) + (J_n(0))^2 P_0(J_n(0))$$

en posant

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{X^k}{(k+2)!} \in \mathbb{C}[X].$$

On déduit alors de (3) que

$$\begin{aligned} J_n(\mu) \exp[J_n(\mu)] &= \lambda \cdot [I_n + J_n(0) + [J_n(0)]^2 P_0(J_n(0))] + e^\mu \cdot [J_n(0) + [J_n(0)]^2 + [J_n(0)]^3 P_0(J_n(0))] \\ &= \lambda \cdot I_n + (\lambda + e^\mu) \cdot J_n(0) + [J_n(0)]^2 P(J_n(0)) \end{aligned}$$

en posant $P = \lambda P_0 + e^\mu(1 + X P_0) = \mu e^\mu P_0 + e^\mu(1 + X P_0) \in \mathbb{C}[X]$.

9. On peut factoriser la matrice

$$N_1 = (\mu + 1)e^\mu \cdot J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)) = J_n(0) \cdot B_0 \quad \text{où} \quad B_0 = [(\mu + 1)e^\mu \cdot I_n + J_n(0)P(J_n(0))]$$

et observer que les deux facteurs $J_n(0)$ et B_0 commutent (ce sont des polynômes en $J_n(0)$). Par conséquent,

$$N_1^n = [J_n(0)]^n B_0^n = 0_n \times B_0^n = 0_n,$$

donc la matrice N_1 est nilpotente et son indice de nilpotence est inférieur à n .

• Par ailleurs, comme $J_n(0)$ est une matrice triangulaire supérieure *stricte*, on peut décomposer la matrice B_0 en somme de la matrice diagonale $(\mu + 1)e^\mu \cdot I_n$ et d'une matrice triangulaire supérieure stricte. On a supposé que $(\mu + 1) \neq 0$ et on sait bien que $e^\mu \neq 0$, donc les coefficients diagonaux de B_0 sont tous différents de 0. Comme B_0 est une matrice triangulaire, on en déduit qu'elle est inversible.

Par conséquent, pour $1 \leq m < n$, la matrice

$$N_1^m = [J_n(0)]^m B_0^m$$

est le produit d'une matrice non nulle par une matrice inversible, donc $N_1^m \neq 0_n$.

L'indice de nilpotence de N_1 est donc égal à n .

|| Il s'agit ici d'adapter le raisonnement du [6.].

• D'après [5.], la matrice N_1 est semblable à $J_n(0)$: il existe une matrice inversible P telle que $N_1 = P J_n(0) P^{-1}$. Par conséquent,

$$J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + N_1 = P(\lambda I_n + J_n(0)) P^{-1} = P J_n(\lambda) P^{-1}.$$

En reprenant le raisonnement de [7.], on en déduit que

$$J_n(\lambda) = P^{-1} [J_n(\mu) e^{J_n(\mu)}] P = M e^M \quad \text{avec} \quad M = P^{-1} J_n(\mu) P.$$

Partie C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10. Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par la matrice N dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Comme f^{p-1} , représenté par $N^{p-1} \neq 0_n$, n'est pas l'endomorphisme nul, il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. D'après [4.], la famille

$$(f^{p-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$$

est une famille libre et d'après le Théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base

$$\mathcal{B} = (f^{p-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$$

de $\mathbb{C}^n$. D'après [5.], la matrice de f relative à cette base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_p(0) & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

et donc de la forme voulue.

11. D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$T_X \times \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \times \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \times T_X = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n.$$

La matrice T_X est donc inversible et son inverse est la matrice T_{-X} .

|| La matrice T_X est une sorte de matrice de transvection (par blocs). Une fois qu'on a remarqué cela, on ne cherche plus très loin l'inverse de T_X .

• On en déduit que $T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_p(0) & Y \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Y = B + XC - J_p(0)X. \quad (4)$$

12. On continue le calcul matriciel par blocs, en lignes cette fois (pour suivre l'indication de l'énoncé) : si

$$X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(p)} \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad J_p(0)X = \begin{pmatrix} X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(p)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant X à gauche, on agit sur les lignes de X : la matrice $J_p(0)$ décale les lignes de X d'un cran vers le haut.

Si on avait multiplié X à droite, on aurait agi sur les colonnes de X (et on aurait décalé les colonnes de X d'un cran vers la droite).

Il vaut mieux ne pas parler d'opérations de pivot ici (même si c'est bien ainsi qu'il faut raisonner), car la matrice $J_p(0)$ n'est pas inversible.

En généralisant la notation proposée par l'énoncé, on déduit de (4) que

$$\forall 1 \leq i < p, \quad Y_{(i)} = B_{(i)} + X_{(i)}C - X_{(i+1)} \quad \text{et} \quad Y_{(p)} = B_{(p)} + X_{(p)}C.$$

On peut donc choisir la ligne $X_{(1)}$ arbitrairement et **définir** les autres lignes de la matrice X par la relation de récurrence :

$$\forall 2 \leq i \leq p, \quad X_{(i)} = B_{(i+1)} + X_{(i-1)}C.$$

De cette manière, on obtient que $Y_{(i)} = 0$ pour $1 \leq i < p$, le mystère restant entier (pour le moment) sur la dernière ligne $Y_{(p)} = B_{(p)} + X_{(p)}C$.

13. D'après [11.], la matrice A' est semblable à la matrice A et donc à la matrice N d'après [10.]. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, les matrices $Q(A')$ et $Q(N)$ sont donc semblables et comme la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même, on en déduit que A' et N ont les mêmes polynômes annulateurs.

En particulier, A' est nilpotente d'indice p , comme N .

• Notons $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$, une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle l'endomorphisme f [10.] est représenté par la matrice A' avec

$$\forall 1 \leq i < p, \quad Y_{(i)} = 0.$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on pose

$$F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n).$$

La forme de la matrice A' nous assure que :

$$f(e_1) = 0, \quad \forall 2 \leq j \leq p, \quad f(e_k) = e_{k-1} \quad \text{et} \quad \forall p < j \leq n, \quad f(e_j) - y_{p,j} \cdot e_p \in F_{p+1}. \quad (5)$$

Nous allons démontrer que la ligne $Y_{(p)}$ est nulle, c'est-à-dire $y_{p,j} = 0$ pour $p < j \leq n$.

On déduit de (5) que

$$\forall p < j \leq n, \forall 1 \leq k \leq p, \quad f^k(e_j) - y_{p,j} \cdot e_{p-k+1} \in F_{p-k+2}.$$

|| *Démonstration par récurrence sans mystère, le plus difficile est de formuler une hypothèse de récurrence correcte.*

Comme l'endomorphisme f^p est identiquement nul, pour $k = p$, on obtient

$$\forall p < j \leq n, \quad f^p(e_j) - y_{p,j} \cdot e_1 = -y_{p,j} \cdot e_1 \in F_2.$$

Comme $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base, la droite vectorielle $\mathbb{C} \cdot e_1$ et l'hyperplan $F_2 = \text{Vect}(e_k, 2 \leq k \leq n)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$, donc il faut que le scalaire $y_{p,j}$ soit nul.

On a ainsi démontré que la dernière colonne du bloc Y était nulle et donc que la matrice A' était diagonale par blocs :

$$A' = \text{Diag}(J_p(0), Z).$$

14. On déduit de [4.] une propriété bien connue : si une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice p , alors il existe une famille libre de cardinal p et par conséquent l'indice de nilpotence est inférieur à n .

|| *C'est un résultat du cours, on n'est pas tenu de le démontrer dans sa copie.*

• Nous allons procéder par récurrence sur la taille des matrices.

HR : On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $1 \leq m \leq n$ et pour tout $1 \leq p \leq m$, toute matrice nilpotente $N \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$ d'indice p est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\text{Diag}(J_{p_1}(0), J_{p_2}(0), \dots, J_{p_r}(0)).$$

- **Initialisation** — Pour $n = 1$, la seule matrice nilpotente est la matrice nulle, qui est égale à $J_1(0)$.
- **Hérédité** — On considère une matrice nilpotente $N \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, d'indice de nilpotence $1 \leq p \leq n+1$.
Si $p = 1$, alors N est la matrice nulle, égale à

$$\text{Diag}(J_1(0), J_1(0), \dots, J_1(0))$$

avec $r = n + 1$.

Si $p = n$, alors N est semblable à $J_n(0)$ [5.] et $r = 1$ cette fois.

Considérons maintenant le cas général : $1 < p < n + 1$. On a démontré précédemment que N était semblable à

$$A' = \begin{pmatrix} J_p(0) & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

et comme A' est nilpotente, alors le bloc diagonal $Z \in \mathfrak{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$ est nilpotent aussi.

Comme $1 < p < n + 1$, alors $1 \leq n + 1 - p \leq n$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au bloc diagonal Z . Il existe donc une matrice inversible $Q_0 \in \text{GL}_{n-p}(\mathbb{C})$ telle que

$$Q_0^{-1} Z Q_0 = \text{Diag}(J_{p_1}(0), \dots, J_{p_r}(0)).$$

La matrice $Q = \text{Diag}(I_p, Q_0) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible : elle est diagonale par blocs et les deux blocs diagonaux sont inversibles. De plus,

$$Q^{-1} A' Q = \text{Diag}(I_p^{-1} J_p(0) I_p, Q_0^{-1} Z Q_0) = \text{Diag}(J_p(0), J_{p_1}(0), \dots, J_{p_r}(0))$$

et comme A' est semblable à N , on en déduit que la matrice N est semblable à une matrice diagonale par blocs dont chaque bloc diagonal est un bloc de Jordan.

On a démontré l'hérédité de l'hypothèse de récurrence, la propriété est donc établie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie D. Représentation Ae^A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

15. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f . Comme les valeurs propres λ_k sont deux à deux distinctes, les facteurs $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ du polynôme caractéristique sont deux à deux premiers entre eux. On déduit alors du Théorème de décomposition des noyaux que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^s F_k. \quad (6)$$

À l'époque (2014), ce n'était pas une question de cours (les sous-espaces caractéristiques n'étaient pas au programme). Depuis 2022, c'est une question de cours.

Pour tout $1 \leq k \leq s$, on note $\mathcal{B}_k$, une base de F_k . La décomposition en somme directe montre que la famille obtenue par concaténation

$$\mathcal{B}_0 = \bigoplus_{k=1}^s \mathcal{B}_k$$

est une base de $\mathbb{C}^n$.

• Chaque sous-espace F_k , en tant que noyau d'un polynôme en f , est stable par f . Par conséquent, la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}_0$, adaptée à la décomposition en somme directe (6), est diagonale par blocs :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \text{Diag}(M_1, \dots, M_s) \quad (7)$$

où M_k est la matrice relative à $\mathcal{B}_k$ de l'endomorphisme f_k de F_k induit par restriction de f .

En particulier, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynôme caractéristiques des blocs diagonaux :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^s \chi_{M_k}. \quad (8)$$

- Pour tout $1 \leq k \leq s$, par définition des sous-espaces F_k ,

$$\forall x \in F_k, \quad (f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}(x) = 0.$$

Par conséquent, en notant $d_k = \dim F_k$, la matrice $M_k - \lambda_k I_{d_k}$ est nilpotente et son polynôme caractéristique est X^{d_k} .

On en déduit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \det(\lambda I_{d_k} - M_k) = \det((\lambda - \lambda_k) I_{d_k} - (M_k - \lambda_k I_{d_k})) = (\lambda - \lambda_k)^{d_k}$$

et donc que le polynôme caractéristique de M_k est égal à $(X - \lambda_k)^{d_k}$. D'après (8),

$$\chi_f = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{d_k}.$$

La décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles est essentiellement unique, donc

$$\forall 1 \leq k \leq s, \quad d_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \dim F_k = \alpha_k.$$

|| *L'égalité entre dimension du sous-espace caractéristique et multiplicité est aussi devenue une question de cours. La démonstration que je donne ici diffère légèrement de celle que j'ai faite en classe.*

On a ainsi obtenu que les blocs diagonaux de (7) étaient de la forme

$$M_k = \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k \quad \text{où la matrice} \quad N_k = (M_k - \lambda_k I_{\alpha_k}) \quad \text{est nilpotente.}$$

16. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. D'après [15.], cette matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\text{Diag}(M_1, \dots, M_s)$. D'après [14.], chaque bloc diagonal M_k est semblable à une matrice de la forme

$$\lambda_k I_{\alpha_k} + \text{Diag}(J_{p_1}(0), \dots, J_{p_r}(0)) = \text{Diag}(J_{p_1}(\lambda_k), \dots, J_{p_r}(\lambda_k))$$

et d'après [9.], chaque sous-bloc diagonal $J_{p_\ell}(\lambda_k)$ peut s'écrire $M_{k,\ell} e^{M_{k,\ell}}$ pour une matrice $M_{k,\ell}$ bien choisie.

Donc la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\text{Diag}(C_i e^{C_i}, 1 \leq i \leq N_0).$$

|| *Un point technique important sera mieux compris s'il est formulé sans utiliser les notations de l'énoncé. On considère une matrice diagonale par blocs $A = \text{Diag}(B_1, \dots, B_r)$ où chaque bloc diagonal B_k est semblable à une matrice C_k : pour tout $1 \leq k \leq r$, il existe donc une matrice inversible Q_k telle que $Q_k^{-1} B_k Q_k = C_k$. La matrice $Q = \text{Diag}(Q_1, \dots, Q_r)$ est alors inversible et*

$$Q^{-1} A Q = \text{Diag}(C_1, \dots, C_r)$$

|| *d'après les règles du calcul par blocs. (On a mené de tels calculs en [11.].)*

En posant $M_0 = \text{Diag}(C_i, 1 \leq i \leq N_0)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_0^k = \text{Diag}(C_i^k, 1 \leq i \leq N_0)$$

et par conséquent

$$M_0 e^{M_0} = \text{Diag}(C_i e^{C_i}, 1 \leq i \leq N_0).$$

On a ainsi démontré qu'il existait une matrice M_0 telle que A soit semblable à $M_0 e^{M_0}$. Comme on l'a vu plus haut [7.], il existe donc une matrice M telle que $A = M e^M$.