Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2025/2026

MP/MPI ⁎⁎

Composition de Mathématiques

Le 17 décembre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices et les objets connectés sont interdits.

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets (K, E, F) où K, E et F sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel X qui satisfont certaines relations de commutation. On désignera toujours par q, un nombre complexe non nul et tel que $q^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A.

Dans cette partie, on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 2$ et par $(x_1, \dots, x_n)$ une base de X.

1. Soit A, un endomorphisme de X représenté dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ par une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Démontrer que tout endomorphisme B de X, commutant à A, est aussi représenté dans cette base par une matrice diagonale.

2. Soient $A_1, \dots, A_p$, des endomorphismes de X.

2. a. Démontrer que : si les seuls sous-espaces vectoriels de X stables par $A_1, \dots, A_p$ sont $\{0\}$ et X, alors tout endomorphisme B de X commutant à $A_1, \dots, A_p$ est un multiple scalaire de l'identité.

2. b. La réciproque est-elle vraie ?

Partie B.

On définit X et $(x_1, \dots, x_n)$ comme dans la première partie et on considère les endomorphismes K_0 et F_0 de X définis par

$$\forall\, 1 \leqslant p \leqslant n, \qquad K_0 x_p = q^{n+1-2p} \cdot x_p$$

et par

$$\forall\, 1 \leqslant p < n, \quad F_0 x_p = x_{p+1} \qquad \text{et} \qquad F_0 x_p = 0.$$

3. Calculer $K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0$.

4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0, puis ceux qui sont stables par F_0 et K_0.

On définit un troisième endomorphisme E_0 de X en posant

$$E_0 x_1 = 0$$

et

$$\forall\, 1 < p \leqslant n, \quad E_0 x_p = \frac{(q^{p-1} - q^{1-p})(q^{n+1-p} - q^{p-n-1})}{(q - q^{-1})^2}\, x_{p-1}.$$

5. Calculer $K_0E_0 - q^2E_0K_0$.

6. Vérifier la relation

$$E_0F_0 - F_0E_0 = \frac{1}{q - q^{-1}} \cdot (K_0 - K_0^{-1}).$$

7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X qui sont stables par K_0, E_0 et F_0.

Partie C.

Dans cette partie, on désigne par K et E, deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe X de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ qui vérifient les conditions suivantes :

1. $KE = q^2 \cdot EK$;
2. K *est inversible ;*
3. E *n'est pas l'endomorphisme nul.*

Pour tout nombre complexe λ, on pose

$$X_\lambda = \mathrm{Ker}(K - \lambda I) \quad \text{et} \quad Y_\lambda = \mathrm{Ker}(E - \lambda I).$$

8. Vérifier les relations suivantes.

8. a. $E(X_\lambda) \subset X_{q^2\lambda}$

8. b. $K(Y_\lambda) \subset Y_{q^{-2}\lambda}$

9. Démontrer que : si $\lambda \neq 0$, alors $Y_\lambda = \{0\}$.

10. Indiquer un nombre entier $r > 0$ tel que $E^r = 0$.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\mathrm{Ker}\, E$ qui soit aussi un vecteur propre pour K.

On suppose ici que $\dim X = 2$ *et on se propose de démontrer qu'il existe une base* (x_1, x_2) *de* X *qui possède les propriétés suivantes :*

(P1) *Il existe un scalaire* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Kx_1 = \lambda \cdot x_1$;

(P2) $Kx_2 = q^{-2}\lambda \cdot x_2$;

(P3) $Ex_1 = 0$;

(P4) $Ex_2 = x_1$.

12. a. Démontrer qu'il existe un vecteur x_1^0 et un scalaire λ tels que

$$Kx_1^0 = \lambda \cdot x_1^0 \qquad \text{et} \qquad Ex_1^0 = 0.$$

On note x_2^0*, un vecteur non nul, non proportionnel à* x_1^0.

12. b. Démontrer que le vecteur $x_1 = Ex_2^0$ est un multiple non nul de x_1^0.

12. c. Démontrer qu'il existe un scalaire $\beta \in \mathbb{C}$ tel que

$$Kx_2^0 = \beta \cdot x_1 + q^{-2}\lambda \cdot x_2^0.$$

12. d. Trouver un scalaire α tel que les vecteurs

$$x_1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = x_2^0 + \alpha \cdot x_1$$

répondent à la question.

Partie D.

Dans cette quatrième partie, on désigne par X *un espace vectoriel complexe de dimension* $n \geqslant 2$ *et on considère un triplet* (K, E, F) *d'endomorphismes de* X *qui vérifient les conditions suivantes :*

1. K *est inversible et* $K^2 \neq I$;
2. $KE = q^2 \cdot EK$;
3. $KF = q^{-2} \cdot FK$;
4. $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1} \cdot (K - K^{-1})$;
5. *Les seuls sous-espaces vectoriels de* X *qui sont stables par* K, E *et* F *sont* $\{0\}$ *et* X.

13. Vérifier que, pour tout entier $m \geqslant 1$,

$$EF^m - F^mE = \frac{q^m - q^{-m}}{(q - q^{-1})^2} \cdot F^{m-1}(q^{1-m} \cdot K - q^{m-1} \cdot K^{-1}).$$

Dans ce qui suit, on note v_1*, un vecteur non nul de* X *annulé par* E *et vecteur propre de* K *pour une valeur propre qu'on notera* λ.
Par ailleurs, on pose $v_m = F^{m-1}v_1$ *pour tout entier* $m \geqslant 1$.

14. Calculer Kv_m.

15. Démontrer la relation suivante : pour tout $m \geqslant 2$,

$$Ev_m = \frac{(q^{m-1} - q^{1-m})}{(q - q^{-1})^2}\,(q^{2-m}\lambda - q^{m-2}\lambda^{-1}) \cdot v_{m-1}.$$

16. Démontrer les assertions suivantes.

16. a. Ceux des vecteurs v_m qui ne sont pas nuls sont linéairement indépendants.

16. b. Il existe un entier $m_0 \geqslant 1$ tel que $v_m = 0$ pour tout entier $m > m_0$ et que les vecteurs $v_1, \ldots, v_{m_0}$ soient linéairement indépendants.

16. c. L'entier m_0 est égal à n.

16. d. La valeur propre λ est égale à $\pm q^{n-1}$.

17. Comparer ce triplet (K, E, F) au triplet (K_0, E_0, F_0) étudié dans la Partie B.

Extraits du rapport du jury

Commentaires et recommandations

Cette épreuve a été plutôt réussie dans l'ensemble, dans la mesure du moins où les questions de pur calcul, parfois ingrat, ont permis de compenser des lacunes certaines en algèbre linéaire.

On notera en général une certaine désinvolture dans la rédaction, et une bonne part d'implicite imprudemment laissée à l'appréciation des correcteurs. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement, soit d'un exercice traité en classe et dont les résultats sont supposés admis.

Parmi les erreurs récurrentes, notons d'abord la confusion classique, de plus en plus fréquente, entre l'espace vide et l'espace réduit à $\{0\}$. Dans le même ordre d'idée, la conviction qu'une famille de vecteurs deux à deux non proportionnels est une famille libre, ou qu'une famille d'espaces deux à deux d'intersection nulle (ce qu'ils appellent des *espaces deux à deux disjoints*) est en somme directe.

On lit trop souvent que tous les endomorphismes sont diagonalisables, ou, plus subtilement, que l'espace entier est la somme des espaces propres.

Un autre problème est celui de la division par zéro, c'est à dire de la simplification par un facteur multiplicatif en omettant de vérifier qu'il n'est pas nul.

Un petit tiers des candidats affirme sans état d'âme qu'un endomorphisme diagonal laisse stables <u>tous</u> les sous-espaces de l'espace vectoriel ambiant.

Quelques erreurs fréquemment commises

2.a. — Beaucoup ne prennent pas la peine de justifier l'existence d'un espace propre. Un nombre important de candidats affirme que si A et B commutent, A laisse stables les espaces stables de B. Ce qui est manifestement faux lorsque, par exemple, B est l'identité.

2.b. — Cette question est omise par plus de la moitié des candidats.

3. — Traitée sans difficulté notable, parfois avec beaucoup de laisser-aller.

4. — Au fil des explications – car on en trouve tout de même de temps en temps – les correcteurs ont compris que les candidats estimaient que tout sous-espace de X possédait une base extraite de la base $(x_1, \dots, x_n)$ de l'énoncé.

Certains candidats confondent espaces propres et espaces stables.

6. — Cette question a été largement abordée et plutôt réussie en guise de rattrapage, mais parfois traitée paresseusement, en omettant de poursuivre les calculs jusqu'au bout puisqu'on pouvait faire confiance à l'énoncé.

9. — Dans beaucoup de copies, on rencontre une innovation majeure en algèbre : la multiplication <u>à droite</u> d'un vecteur par un opérateur, ce qui donne

$$AKx = Ky \implies Ax = y.$$

12. — Une occasion de regagner quelques-uns des points perdus dans les questions précédentes. Ces questions faciles ont été jugées en partie sur la qualité de leur rédaction.

14, 15. — La rédaction en est trop souvent négligée.