
CALCULS DE PROBABILITÉ

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 13 — Espaces probabilisés

[24]	11-01	[41]	11-13	[61.3]	11-03
[26]	11-02	[42]	11-14		
[34.1]	11-04	[43]	11-15		
[34.2]	11-05	[52]	11-01		

Chapitre 14 — Variables aléatoires

Chapitre 15 — Vecteurs aléatoires

[15]	13-01	[36.1]	13-06	[44]	13-12
[18]	13-02	[37]	13-07	[48]	13-13
[19]	13-03	[38]	13-08	[50]	13-14
[23.4]	13-01	[39]	13-09	[52]	13-05
[23.5]	13-02	[40]	13-10	[78]	13-15
[34]	13-04	[42]	13-11		

Applications du cours

Exercice 1

11-01

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements, on pose

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

1. La partie B est un évènement et

$$\mathbf{P}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right).$$

2. Si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors l'évènement B est négligeable et presque sûrement, à partir d'un certain rang, aucun des évènements A_n n'est réalisé :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\right) = 1.$$

3.a. Si $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série $\sum u_n$ diverge, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N (1 - u_n) = 0.$$

3.b. On suppose que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants. On admet que la famille $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements indépendants.

Si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\right) = 0$$

et l'évènement B est presque sûr.

Exercice 2

11-02

Soient μ_1 et μ_2 , deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

La classe $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{E} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

contient $\emptyset$, est stable par passage au complémentaire et est stable par union dénombrable croissante : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour $\subset$ de parties mesurables qui appartiennent à $\mathcal{C}$, alors

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}.$$

Exercice 3

11-03

Soit E , un ensemble fini ou dénombrable muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$.

Pour toute loi de probabilité discrète $(p_x)_{x \in E}$ sur E , il existe une, et une seule, mesure de probabilité discrète μ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \mu(\{x\}) = p_x.$$

Exercice 4

11-04

On dispose de deux urnes : l'urne 1 contient deux boules blanches et trois bleues ; l'urne 2 contient trois boules blanches et quatre bleues. On tire une boule dans l'urne 1 et on la place dans l'urne 2. On tire alors une boule dans l'urne 2.

1. La probabilité pour que la première boule tirée soit bleue est égale à $3/5$.

2. La probabilité pour que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à $23/40$.

Exercice 5

11-05

Deux usines produisent des flaveurmètres bilobés. La première produit deux fois plus de flaveurmètres bilobés que l'usine 2. On estime à 20% (resp. à 5%) la proportion de flaveurmètres bilobés défectueux produits par l'usine 1 (resp. par l'usine 2).

1. La proportion de flaveurmètres produits par l'usine 1 est égale à $2/3$.

2. La proportion de flaveurmètres non défectueux est égale à $17/20$.

3. Si un flaveurmètre tiré au hasard de la production est défectueux, la probabilité pour que ce flaveurmètre ait été produit par l'usine 1 est égale à $8/9$.

Exercice 6

11-06

Soient A , B et C , trois évènements indépendants avec $\mathbf{P}(A) = 1/4$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$ et $\mathbf{P}(C) = 1/2$.

1. La probabilité pour qu'aucun de ces évènements ne soit réalisé est égale à $1/4$.

2. La probabilité pour qu'un seul de ces évènements soit réalisé est égale à $11/24$.

Exercice 7

11-07

Quand un tricheur tire une carte dans un jeu de 52 cartes, il est sûr de retourner un as.

1. La probabilité pour qu'un individu retourne un as en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes est égale à $(1 + 12p)/13$, où p est la proportion de tricheurs dans la population.

2. Sachant qu'un individu a retourné un as, la probabilité pour qu'il soit un tricheur est égale à $13p/(12p + 1)$.

Exercice 8

11-08

Une boîte contient neuf pièces : deux pièces normales, trois pièces truquées avec deux côtés Face et quatre pièces truquées avec deux côtés Pile.

Si on tire une pièce au hasard et qu'on la lance (sans l'examiner), on obtient Face avec probabilité $4/9$.

Exercice 9**11-09**

Un électeur indécis vote tantôt à gauche, tantôt à droite. Pour chaque scrutin, la probabilité pour qu'il vote comme au scrutin précédent est égale à $2/3$.

1. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant à Pile ou Face. Quelle est la probabilité pour qu'il vote à gauche lors des deux premiers scrutins et à droite lors des deux scrutins suivants?

2. Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant dans une urne qui contient une boule rouge (pour voter à gauche) et trois boules bleues (pour voter à droite). Quelle est la probabilité pour qu'il vote à droite au deuxième scrutin?

Exercice 10**11-10**

Dans une usine, les machines M_1 , M_2 et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de ziglotrons à coulisse. Les taux de ziglotrons non conformes produits par ces machines sont respectivement 1%, 2% et 3%.

1. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle défectueux.

1.a. Il y a environ 1 chance sur 4 pour qu'il ait été produit par la machine M_2 .

1.b. Pour quelles valeurs de $1 \leq k \leq 3$ la probabilité *a posteriori* $P(M_k | D)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k est-elle plus grande que la probabilité *a priori* $P(M_k)$ pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k ?

2. Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle conforme. Il y a environ 3 chances sur 10 pour qu'il ait été construit par la machine M_2 . Expliquer.

Exercice 11**11-11**

Une particule émise par un matériau radioactif atteint une cible donnée avec une probabilité $p = 1\%$.

On modélise ce phénomène aléatoire par une famille $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements indépendants tels que

$$\forall n \geq 1, \quad P(A_n) = p.$$

1. On attend que n particules soient émises. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une d'elles atteignent la cible?

2. Pour quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$ la probabilité qu'au moins l'une des N premières particules émises atteigne la cible est-elle supérieure à 80%?

Exercice 12**11-12**

Des personnes se transmettent une information : ou bien l'information est transmise fidèlement (avec probabilité p), ou bien elle est transformée en son contraire (avec probabilité $(1-p)$). On note p_n , la probabilité pour que la n -ième personne reçoive l'information correcte.

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$

3. La limite de p_n est indépendante de $0 < p < 1$.

Exercice 13**11-13**

Soit $B \in \mathcal{A}$, un événement tel que $P(B) > 0$. Deux événements A et C sont indépendants pour la mesure de probabilité P_B si, et seulement si,

$$P(C | A \cap B) = P(C | B).$$

Exercice 14**11-14**

Soient A et B , deux événements. Si

$$P(A | B) = P(A | B^c),$$

alors ces deux probabilités conditionnelles sont égales à $P(A)$ et les événements A et B sont indépendants.

Exercice 15**11-15**

Soient $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ tels que $P(A) = P(B) = 3/4$. Alors

$$2/3 \leq P(A | B) \leq 1.$$

Exercice 16**12-01**

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Pour toute variable aléatoire réelle X ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X| \geq n) = 0.$$

2. On suppose que X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans l'ensemble (fini ou dénombrable) $E \subset \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n = \{x \in E : n \leq |x| < n+1\} \quad \text{et} \quad \sigma_n = \sum_{x \in E_n} |x| P(X = x).$$

Alors la série $\sum \sigma_n$ est convergente et comme

$$n P(|X| \geq n) = n \sum_{k=n}^{+\infty} P(X \in E_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sigma_k,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n P(|X| \geq n) = 0.$$

Exercice 17**12-02**

Soient $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et X , une variable aléatoire d'espérance finie. On suppose que la variable $\varphi(X)$ est d'espérance finie.

1. Il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq a[x - E(X)] + \varphi(E(X)).$$

2. Démontrer l'inégalité de Jensen :

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)).$$

On en déduit que $E(X^2) \geq [E(X)]^2$ pour toute variable aléatoire d'espérance finie.

Exercice 18**12-03**

Si la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 19**12-04**

Une variable aléatoire X dont la loi est caractérisée par

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/3$$

et la variable aléatoire définie par $Y = X^2$ ne sont pas corrélées.

Exercice 20**13-01**

Soient X et Y , deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $N = X + Y$ suit la loi binomiale négative de paramètres $(2, p)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(N = k) = (k+1)p^2q^k$$

(avec $q = 1 - p$) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$:

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad \mathbf{P}(X = i | N = n) = \frac{1}{n+1}.$$

1. Les variables X et Y suivent la loi binomiale négative de paramètres $(1, p)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k.$$

2. La loi jointe du couple

$$(D, M) = (X - Y, \min\{X, Y\})$$

est donnée par

$$\forall (h, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(D = h, M = k) = p^2q^{|h|+2k}$$

donc M suit la loi binomiale négative de paramètres $(1, [1+q]p)$ et D est une variable aléatoire centrée.

3. Les couples (X, Y) et (D, M) sont deux familles de variables aléatoires indépendantes, mais les variables X, Y, D, M ne sont pas indépendantes.

Exercice 21**13-02**

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. S'il existe un réel α tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\alpha}{2^{i+j}},$$

alors $\alpha = e^{-1}$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 1$.

2. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 22**13-03**

Soient X et Y , deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, k\}$:

$$\forall 1 \leq h \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(Y = h | X = k) = \frac{1}{k}.$$

- Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- En déduire la loi de Y .

Exercice 23**13-04**

Soient X, Y et Z , trois variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X et Y ont même loi et que

$$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = 1/3,$$

$$\mathbf{P}(Z = 0) = 1/3, \quad \mathbf{P}(Z = 1) = 2/3.$$

On pose $U = X$ et $V = X + Z \pmod{3}$.

1. Les couples (X, Y) et (U, V) ont des lois différentes bien que

$$U \stackrel{d}{=} X, \quad V \stackrel{d}{=} Y, \quad (U + V) \stackrel{d}{=} (X + Y).$$

2. Les variables aléatoires U et V ne sont pas corrélées et

$$\forall t \in [0, 1], \quad \mathbf{E}(t^{U+V}) = \mathbf{E}(t^U) \mathbf{E}(t^V)$$

alors que U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice 24**13-05**

Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall 0 \leq s, t \leq 1, \quad \mathbf{E}(s^X t^Y) = \mathbf{E}(s^X) \mathbf{E}(t^Y).$$

Exercice 25**13-06**

1. La matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & 0 & b \\ 0 & a\sqrt{2} & b \\ b & b & a\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ et $a^2 \neq b^2$.

3. Soient X et Y , deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, qui suivent la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. La probabilité pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X\sqrt{2} & 0 & Y \\ 0 & X\sqrt{2} & Y \\ Y & Y & X\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

soit inversible est égale à $2q/(1+q)$, où $q = 1 - p$.

Exercice 26**13-07**

Soient $n \geq 3$ et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice

$$M(a, b) = (a - b)I_n + bJ_n$$

est diagonalisable.

2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi et qui admettent un moment d'ordre 2, alors les variables aléatoires

$$\lambda = X - Y \quad \text{et} \quad \mu = X + (n - 1)Y$$

ne sont pas indépendantes.

3. En particulier, si X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p , alors la probabilité pour que la matrice aléatoire $M(X, Y)$ soit inversible est égale à $2q/(1 + q)$ où $q = 1 - p$.

Exercice 27**13-08**

Soient X et Y , deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et qu'elles suivent la loi géométrique de paramètre p et on pose $q = 1 - p$.

1. La loi de $S = X + Y$ est caractérisée par

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(S = k) = (k - 1)p^2q^{k-2}.$$

2. Conditionnellement à $[S = n]$, les variables aléatoires X et Y suivent une loi uniforme et ne sont pas indépendantes.

Exercice 28**13-09**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

1. La variable aléatoire $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\tau = \lambda + \mu$.

2. La loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et λ/τ .

Exercice 29**13-10**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

1. La somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre n .

2. Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à l'événement $[S_n = s]$, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres s et $1/n$:

$$\forall 0 \leq k \leq s, \quad \mathbf{P}_{[S_n=s]}(X_n = k) = \binom{s}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-k}.$$

3. Pour $s \geq 1$, les événements $[X_1 = s]$ et $[X_2 = s]$ sont indépendants pour $\mathbf{P}$, mais incompatibles pour $\mathbf{P}_{[S_n=s]}$, donc les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas indépendantes pour la mesure de probabilité $\mathbf{P}_{[S_n=s]}$.

Exercice 30**13-11**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et indépendantes. On suppose que X_n suit la loi de Poisson de paramètre n pour tout $n \geq 1$.

1. L'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n^2}$$

sont respectivement égales à $(n+1)/(2n)$ et à $(n+1)/(2n^3)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n assez grand,

$$[|Y_n - \mathbf{E}(Y_n)| \leq \varepsilon/2] \subset [|Y_n - 1/2| \leq \varepsilon]$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Y_n - 1/2| \leq \varepsilon) = 1.$$

Exercice 31**13-12**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_k = X_k + X_{k+1}.$$

1. Calculer la loi, l'espérance et la variance de Y_k .

2. Les variables aléatoires Y_k sont-elles corrélées? indépendantes?

3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Exercice 32**13-13**

1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un diviseur de

$$P_0 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^8 + X^9 + X^{10},$$

alors le degré de P est pair.

2. On lance deux dés truqués : la somme des points obtenus est représentée par $S = D_1 + D_2$, où D_1 et D_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quelles que soient les lois de D_1 et D_2 , la variable S ne peut suivre la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

Exercice 33**13-14**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que leur somme $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre 2λ .

1. Si X et Y ont même loi, alors cette loi est la loi de Poisson de paramètre λ .

2. Si X suit une loi de Poisson, alors Y suit aussi une loi de Poisson.

Exercice 34**13-15**

Un mathématicien esthète repeint sa chambre tous les 14 mars : il n'aime que le gris taupe, le vert anis et le bleu lagon. En prenant possession de son appartement ($n = 0$), il peint sa chambre en gris taupe et décide de changer de couleur chaque année.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n , B_n et C_n , les événements *la chambre est gris taupe* (resp. *vert anis*, resp. *bleu lagon*) lors de l'année n et on note

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n).$$

1. Proposer un modèle probabiliste qui permette d'exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. La matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Elle admet 1 et $-1/2$ pour valeurs propres.

3. Étudier le comportement de a_n , b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercices posés en colle et aux oraux**Exercice 35****kh14-01**

Soit X , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1/n)$ (où $n \geq 2$ est un entier).

1. Démontrer que $P(X \geq n^2) \leq 1/n$.
2. Démontrer que $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - 1/n$. En déduire que

$$P(X \geq 2n) \leq 1 - 1/n.$$

Exercice 36**kh14-02**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite strictement décroissante de réels positifs qui tend vers 0. Déterminer un réel λ tel qu'il existe une mesure de probabilité μ sur l'espace discret $(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n.$$

Exercice 37**kh14-03**

On répète n fois de suite dans les mêmes conditions une expérience aléatoire qui a, à chaque fois, une probabilité de réussite égale à $1/n$. Démontrer que la probabilité de réussir au moins une fois au cours des n répétitions est supérieure à $(1 - 1/e)$.

Exercice 38**kh14-04**

Deux joueurs s'affrontent dans un tournoi qui consiste en une succession de manches indépendantes.

Chaque manche peut s'achever sur

- la victoire du joueur J_1 avec probabilité $p_1 > 0$;
- la victoire du joueur J_2 avec probabilité $p_2 > 0$
- ou un résultat nul avec probabilité $q = 1 - p_1 - p_2 \geq 0$.

Dans le premier cas, le tournoi se poursuit; il s'achève dans les autres cas.

Justifier que le tournoi s'arrête et calculer la probabilité de victoire pour chacun des deux joueurs.

Exercice 39**kh14-05**

On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}, \mathcal{E}, \mu)$ où $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ est la tribu discrète. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{n\}) = 0.$$

Exercice 40**kh14-06**

On doit joindre r personnes. La probabilité de joindre une personne lors d'un appel téléphonique est p . On note X , le nombre d'appels à effectuer pour joindre les r personnes.

Proposer un modèle probabiliste. En déduire la fonction génératrice de X , son espérance et sa variance.

Exercice 41**kh14-06bis**

On doit joindre r personnes. La probabilité de joindre une personne lors d'un appel téléphonique est p et chaque heure, on essaie de joindre ces r personnes. On note T , le nombre d'heures au terme desquelles on aura réussi à joindre les r personnes.

Proposer un modèle probabiliste. La variable aléatoire T est-elle d'espérance finie? Admet-elle un moment d'ordre deux?

Exercice 42**Kh14-51**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espace probabilisé et A , B et C , trois événements.

1. Démontrer que

$$|P(A \cap B) - P(A \cap C)| \leq 1 - P(B \cap C).$$

2. Démontrer que

$$P(A \cap C^c) \leq P(A \cap B^c) + P(B \cap C^c).$$

Exercice 43**Kh14-52**

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Calculer la fonction génératrice de X .
2. En déduire l'espérance de X .

Exercice 44**Kh14-53**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel est définie une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

1. Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - 1\right| > \alpha\right) = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right) = f(1).$$

Exercice 45

Kh14-54

On considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tX_k}) \leq \exp(t^2/2)$$

ainsi que la variable aléatoire M_n définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_n(\omega) = \max_{1 \leq k \leq n} |X_k(\omega)|.$$

1. Démontrer que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{t|X_k|}) \leq 2 \exp(t^2/2).$$

2. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tM_n}) \leq 2n \exp(t^2/2).$$

3. Démontrer que

$$\forall s > 0, \quad \mathbf{P}(M_n \geq s) \leq 2n \exp(-s^2/2).$$

4. On rappelle l'**inégalité de Jensen** : si φ est une fonction convexe et si X et $\varphi(X)$ sont d'espérance finie, alors

$$\varphi(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(\varphi(X)).$$

Déduire de l'inégalité de Jensen une majoration de $\mathbf{E}(M_n)$.

Exercice 46

Kh14-55

Soient X et Y , deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X et Y ne prennent qu'un nombre fini de valeurs

$$X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_m\} \quad Y : \Omega \rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$$

et que

$$\forall 1 \leq i < m, \forall 1 \leq j < n, \quad \mathbf{E}(X^i Y^j) = \mathbf{E}(X^i) \mathbf{E}(Y^j).$$

Démontrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 47

Kh14-56

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, 1/2)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$Y = \min(X, 2n - X)$$

et calculer l'espérance de Y .

Exercice 48

rms128-722

1. Soit X , une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

2. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On effectue n tirages avec remise et on note X_N , le plus grand des numéros tirés.

2.a. Calculer $\mathbf{E}(X_N)$. (On ne cherchera pas à simplifier l'expression trouvée.)

2.b. Calculer un équivalent de $\mathbf{E}(X_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 49

rms128-723

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise. On note X_k , le numéro de la k -ième boule tirée.

On dit qu'il y a un **record** lors du k -ième tirage si

$$X_k > \max\{X_1, \dots, X_{k-1}\}.$$

Par convention, il y a un record lors du premier tirage.

On note S_n , le nombre de records au cours des n tirages.

1. Déterminer $\mathbf{P}(S_n = 1)$ et $\mathbf{P}(S_n = n)$.

2. Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on note T_k , l'indicatrice d'un record lors du k -ième tirage.

2.a. Déterminer la loi des variables aléatoires T_k .

2.b. En déduire l'espérance de S_n .

Exercice 50

rms128-725

On considère une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes d'espérance finie et on considère la variable aléatoire

$$A : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = (a_{i,j}(\omega))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

1. Démontrer que $\det A$ est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(\det A) = \det(\mathbf{E}(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

2. On suppose que les variables aléatoires $a_{i,j}$ suivent toutes la même loi. Calculer $\mathbf{E}[\chi_A(x)]$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 51

rms128-726

Soient A et B , deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suivent toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Calculer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + (A(\omega) - 1)x'(t) + B(\omega)x(t) = 0 \quad (\mathbf{E}_\omega)$$

tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 52**rms128-728**

On dispose de $(p+1)$ urnes $U_0, \dots, U_p$ contenant chacune p boules : l'urne i contient i boules blanches et $(p-i)$ boules noires.

On choisit une urne aléatoirement et on effectue ensuite n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note alors N_p , la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la probabilité conditionnelle de $[N_p = k]$ sachant qu'on a choisi l'urne i .
2. Calculer l'espérance de N_p .

Exercice 53**rms128-729**

Soient $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et qu'elles suivent toutes la loi de Rademacher centrée :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = 1/2.$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on fixe un réel $\varepsilon > 0$.

1. Majorer la probabilité

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right).$$

2. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tS_n}) = \text{ch}^n t.$$

3. Démontrer que

$$\forall t > 0, \quad \text{ch } t \leq e^{t^2/2}.$$

4. Démontrer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$

5. En déduire que

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right).$$

Exercice 54**rms130-624**

Soient X et Y , deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

Exercice 55**rms130-630**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui suivent toutes la même loi. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $R_n(\omega)$, le cardinal de l'ensemble aléatoire

$$\{X_k(\omega), 1 \leq k \leq n\}.$$

1. Démontrer que

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(R_n) \leq a + n \mathbf{P}(X_1 \geq a).$$

2. En déduire que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On suppose que les X_n sont des variables d'espérance finie. Démontrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 56**rms130-982**

Soient $s \in]1, +\infty[$ et X , une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) \cdot n^s}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "l'entier n divise X ".

1. Vérifier que $A \in \mathcal{A}$ et calculer $\mathbf{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient $n_1, \dots, n_k$, des entiers deux à deux premiers entre eux. Démontrer que $(A_{n_i})_{1 \leq i \leq k}$ est une famille d'événements indépendants.
3. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$, la suite croissante des entiers premiers. Démontrer que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = \zeta(s).$$

4. Démontrer que la série $\sum 1/p_n$ est divergente.

Exercice 57**rms130-984**

1. Démontrer qu'il existe un réel $1 < a < 2$ et un complexe b vérifiant $|b| < 1$ tels que

$$X^3 - X^2 - X - 1 = (X - a)(X - b)(X - \bar{b}).$$

2. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note p_n , la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n -ième lancer.

Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n , p_{n+1} et p_{n+2} .

3. Calculer p_n et donner un équivalent de p_n .

Exercice 58**rms130-985**

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires. On suppose que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$ et on note G_{X_n} , la fonction génératrice de X_n .

- 1.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $(\mathbf{P}(X_n = k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

- 1.b. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la suite des fonctions génératrices G_{X_n} converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction génératrice G_X .

- 1.c. La convergence est-elle uniforme?

2. Soient X et $(X_n)_{n \geq 1}$, des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note G (resp. G_n), la fonction génératrice de la variable X (resp. de X_n).

- 2.a. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k).$$

Démontrer que la suite $(G_{X_n})_{n \geq 1}$ des fonctions génératrices converge simplement sur $[0, 1]$ vers G_X .

- 2.b. Établir la réciproque.

Exercice 59**rms130-1045**

Une puce initialement placée à l'origine d'un plan fait des sauts aléatoires d'une unité dans les quatre directions possibles. On note (X_n, Y_n) , ses coordonnées après n déplacements. Calculer $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$.

Exercice 60**rms132-174**

Soit $n \geq 5$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un sous-espace V de dimension $k \leq n - 4$. La projection orthogonale sur V est notée π_V et la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de cette projection est notée P .

On note A , la matrice P privée de sa diagonale et $D = P - A$.

On considère un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ sont supposées indépendantes et de même loi :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

On étudie ici la variable aléatoire

$$R = d(X, V) = \min_{v \in V} \|X - v\|.$$

1. Démontrer que $R(\omega) \leq \sqrt{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
2. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \langle x | x - \pi_V(x) \rangle.$$

3. En déduire que

$$R^2 = n - k - X^\top \cdot A \cdot X.$$

Calculer $E(R^2)$.

4. Démontrer que $\text{tr } D^2 \geq k^2/n$.
5. Démontrer que

$$E[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] \leq \frac{2k(n-k)}{n}.$$

6. Démontrer que

$$\mathbf{P}(R \geq \sqrt{n-k} + 2) \leq \frac{k}{8n}.$$

Exercice 61**rms132-648-649-651**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Soient $m < n$, deux entiers strictement positifs. On note E , l'ensemble $\mathfrak{P}_m([1, n])$ des parties de $[1, n]$ dont le cardinal est égal à m et on considère une variable aléatoire $A : \Omega \rightarrow E$:

$$\forall F \in \mathfrak{P}_m([1, n]), \quad [A = F] \in \mathcal{A}$$

dont la loi est uniforme :

$$\forall F, G \in \mathfrak{P}_m([1, n]), \quad \mathbf{P}(A = F) = \mathbf{P}(A = G).$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = \max A - \min A$$

et son espérance.

2. Première variante

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On extrait m boules de l'urne et on note M , le plus grand des numéros tirés. Calculer l'espérance et la variance de M .

3. Deuxième variante

On répartit aléatoirement m boules parmi n cases numérotées de 1 à n (chaque case pouvant contenir au plus une boule). Soit Δ , la différence entre le plus grand numéro et le plus petit numéro des cases occupées. Calculer la loi et l'espérance de Δ .

Exercice 62**rms132-652**

Soit $r > 0$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \int_0^1 r x^{k-1} (1-x)^r dx.$$

1. Démontrer que $(p_k)_{k \geq 1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X , une variable aléatoire discrète telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Pour quelles valeurs de r la variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ? Calculer $E(X)$ dans ce cas.

Exercice 63**rms132-654**

Soient X_1 et X_2 , deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Calculer l'espérance de $U = \min\{X_1, X_2\}$ et de $V = \max\{X_1, X_2\}$.

Exercice 64**rms132-655**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, strictement positives. On suppose que X et $1/X$ sont des variables aléatoires d'espérance finie. Démontrer que X/Y est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$E(X/Y) \geq 1.$$

Exercice 65**rms132-656**

Soit X , une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$. Démontrer que

$$V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 66**rms132-661-669**

Soit X , une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre deux. On suppose aussi que X n'est pas presque sûrement nulle.

1. Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq \lambda E(X) + X(\omega) \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda E(X)]}.$$

2. Démontrer que, pour tout $0 < \lambda < 1$,

$$\mathbf{P}(X \leq \lambda E(X)) \geq \frac{(1-\lambda)^2 \cdot E(X)^2}{E(X^2)}.$$

L'intérêt de cet exercice est de présenter une variante de l'inégalité de Markov.

Exercice 67**rms132-668**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On procède à des tirages sans remise : après chaque tirage, on enlève de l'urne les boules qui ont un numéro supérieur à celui de la boule tirée.

On note X_n , le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
2. Démontrer que

$$\forall n \geq 2, \quad E(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k).$$

3. Calculer $E(X_n)$ et en déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 68**rms132-670**

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$\forall k \geq 1, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E(e^{tS_n}) \leq \exp(nt^2/2).$$

2. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad E(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp(-a^2/2n).$$

Exercice 69**rms132-881**

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n P(X > k) = (n+1) P(X > n) + \sum_{k=0}^n k P(X = k).$$

2. On suppose que X est une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) P(X > n) = 0.$$

Que peut-on en déduire sur la série $\sum P(X > n)$?

3. On suppose que X n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que la série $\sum P(X > n)$ est divergente.

Exercice 70**rms132-984**

1. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois) jusqu'à ce que les boules restant dans l'urne soient toutes de la même couleur.

Modéliser la loi du nombre X_n de boules qui restent dans l'urne à l'issue des tirages.

2. On considère deux urnes contenant chacune n boules. On effectue des tirages sans remise (une boule à la fois), en choisissant à chaque fois l'une des deux urnes de manière équiprobable jusqu'à ce que l'on constate que l'urne choisie soit vide.

Modéliser la loi du nombre Y_n de boules qui restent dans l'autre urne à ce moment-là. Calculer un équivalent de l'espérance de Y_n .

Exercice 71**rms132-1108**

On considère $(p+1)$ urnes numérotées de 0 à p . L'urne i contient i boules blanches et $(p-i)$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note N_p , le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de N_p ?
2. Calculer l'espérance de N_p .
3. Calculer la limite de $P(N_p = j)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 72**rms132-1123a**

1. Soient X , une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{p}{n} P(X = n-1).$$

Déterminer la loi de X .

2. Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

Exercice 73**rms132-1123b**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

1. Quelle est la loi de $X + Y$?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant

$$[X + Y = n].$$

Préciser l'espérance et la variance de cette loi.

Exercice 74**rms132-1123c**

Soient X , Y et Z , des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs a , b et c . On pose

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = Y + Z.$$

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V .

Exercice 75**rms132-1180**

Une urne contient N boules : il y a $1 \leq r \leq N$ boules blanches et $(N-r)$ boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'on ait tiré les r boules blanches : on note X , le nombre aléatoire de tirages effectués.

Autrement dit, on considère l'ensemble E des N -listes constituées de r fois le chiffre 1 et de $(N-r)$ fois le chiffre 0. Cet ensemble est muni de la loi uniforme et, pour chaque N -liste $\omega \in E$, on pose

$$X(\omega) = \max\{1 \leq k \leq N : \omega_k = 1\}.$$

L'ensemble E est muni de la tribu discrète $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$, si bien que X est une variable aléatoire sur $(E, \mathcal{E})$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. a. Calculer la probabilité $P(X = k)$.
2. b. Que dire de la loi de X pour $r = 1$? pour $r = N$?
3. Démontrer que

$$E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

Exercice 76**rms132-1181**

Une urne contient n tickets, dont p sont gagnants. Un joueur tire p tickets.

1. On suppose que le joueur effectue des tirages *avec* remise. Le nombre de tickets gagnants est alors modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(p, p/n)$ (nombre de succès lors de p expériences indépendantes, avec probabilité de succès égale à p/n à chaque fois).

1.a. Calculer la probabilité $P(n, p)$ de tirer au moins un ticket gagnant.

1.b. Calculer la limite de $P(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

2. On suppose que le joueur effectue des tirages *sans* remise; que les tickets sont indiscernables (hormis le fait d'être gagnant ou perdant) et que tous les résultats possibles sont équiprobables.

2.a. Combien y a-t-il de résultats possibles?

2.b. Quelle est la proportion $Q(n, p)$ de résultats qui comptent au moins un ticket gagnant?

2.c. Quelle est la limite de $Q(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$?

3. On suppose encore que le joueur effectue des tirages *sans* remise, mais on suppose cette fois que les tickets soient tous numérotés (et donc tous discernables). Proposer un modèle probabiliste.

Exercice 77**rms132-1182**

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue des tirages avec remise successifs.

On note Y , l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu.

On note Z , l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y .

2. Reconnaître la loi de $Y - 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .

3. Déterminer la loi du vecteur (Y, Z) .

4. En déduire la loi de Z .

Exercice 78**rms132-1185**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes les deux la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}.$$

On cherche à calculer la probabilité pour que M soit diagonalisable.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1 + X)^{2n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Conclure.

Exercice 79**rms132-1186**

Pour $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = p^2 k (1 - p)^{k-1}.$$

1. Vérifier que $(p_k)_{k \geq 1}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit X , une variable aléatoire telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X - 1)$ et de $\mathbf{E}[(X - 1)(X - 2)]$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 80**rms132-1189**

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes. Pour tout entier $n \geq 1$, on suppose que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ et on pose

$$\bar{p}_n = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}.$$

1. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

2. On suppose que $\bar{p}_n$ tend vers p lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 81**rms132-1190**

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet un moment d'ordre deux et que la variable aléatoire

$$Z = X + Y + 1$$

suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de p .

2.a. Calculer la fonction génératrice de X .

2.b. En déduire la loi de X .

Exercice 82**rms132-1191**

1. Développer

$$f(t) = \frac{t}{2 - t^2}$$

en série entière. Préciser le rayon de convergence.

2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f .

3. Calculer l'espérance de X .

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{2} \cdot X$.

Exercice 83**rms132-1192**

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\alpha}{k+1} \binom{n-1}{k-1}.$$

1. Pour $1 \leq k \leq n$, déterminer α tel que

$$\binom{n}{k} = \alpha \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Que vaut le réel α ?
3. Calculer l'espérance de X .
4. Calculer la variance de X .

Exercice 84**rms132-1235**

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Calculer la probabilité pour que X soit paire et la probabilité pour que X soit un multiple de 3.
2. Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 85**rms133-204**

Soit X , une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont le support est fini.

1. On appelle **médiane** de X tout réel μ tel que

$$\mathbf{P}(X \leq \mu) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq \mu) \geq \frac{1}{2}.$$

Démontrer l'existence d'une médiane. Y a-t-il unicité de la médiane ?

2. Pour quels réels t l'espérance $\mathbf{E}[(X - t)^2]$ est-elle minimale ?
3. Pour quels réels t l'espérance $\mathbf{E}[|X - t|]$ est-elle minimale ?

Exercice 86**rms133-205**

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **stochastiquement inférieure** à Y lorsque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X \leq t) \leq \mathbf{P}(Y \leq t).$$

On note alors $X \leq_{\text{st}} Y$.

1. Démontrer que $X \leq_{\text{st}} Y$ si, et seulement si,

$$\mathbf{E}[h(X)] \leq \mathbf{E}[h(Y)]$$

pour toute fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et bornée.

2. On suppose que $X \leq_{\text{st}} Y$ et que X et Y sont indépendantes. Démontrer que

$$\mathbf{P}(X \leq Y) > \frac{1}{2}.$$

Peut-on améliorer cette minoration en remplaçant $1/2$ par une constante $\alpha > 1/2$?

Exercice 87**rms133-206**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, strictement positives. Calculer l'espérance de la variable aléatoire

$$Y_{m,n} = \frac{X_1 + \dots + X_m}{X_1 + \dots + X_m + \dots + X_n}$$

en fonction de $1 \leq m \leq n$.

Exercice 88**rms134-1378**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k + X_{k+1}.$$

Exercice 89**rms134-1531**

La probabilité pour qu'une personne passant sous l'échafaudage d'un peintre en bâtiment reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y), le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte de peinture).

1. On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y . Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
2. On suppose que N personnes sont passées, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y , ainsi que l'espérance et la variance de X . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 90**rms134-1536**

On considère une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$.

On considère que la variable aléatoire X_k indique l'année de la première floraison de la tulipe k . En considérant que, si une tulipe a fleuri une année, alors elle fleurit toutes les années suivantes, on note X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.

1. Exprimer X en fonction des variables aléatoires X_k .
2. Calculer $\mathbf{P}(X > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que X est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

Exercice 91**rms134-1539**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q . On pose $Z = X/Y$.

1. Vérifier que $Z \leq X$. Démontrer que Z admet une espérance et une variance. Préciser la valeur de $\mathbf{E}(Z)$.
2. Caractériser la loi de Z .

Exercice 92**rms134-1543**

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$C_n = \# \{X_1, \dots, X_n\}.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, l'application $C_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire d'espérance finie.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k + n^2 \mathbf{P}(X_1 \geq k).$$

3. On suppose dorénavant que les variables aléatoires X_k sont d'espérance finie.

Démontrer que

$$\mathbf{P}(X_1 \geq k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(1/k).$$

En déduire que

$$\mathbf{E}(C_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

Exercice 93**rms135-1492**

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire trois boules simultanément et on note X , le plus petit numéro tiré.

Quelles sont les valeurs possibles pour X ? Proposer un modèle probabiliste raisonnable et calculer $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$ et $\mathbf{P}(X = n)$ en fonction de ce modèle.

Exercice 94**rms135-1493**

Les clients A_1 , A_2 et A_3 arrivent à deux guichets à $t = 0$: les clients A_1 et A_2 sont servis pendant que le client A_3 patiente.

On modélise cette situation par trois variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces trois variables aléatoires sont indépendantes et suivent toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $0 < p < 1$).

1. On note Y , l'instant auquel le client A_3 accède à l'un des deux guichets. Exprimer Y en fonction de X_1 et de X_2 . En déduire la loi de Y .
2. On note Z , l'instant auquel le client A_3 quitte le guichet. Exprimer Z en fonction de X_1 , X_2 et X_3 . Déterminer la loi de Z .
3. Calculer l'espérance de Z .

Exercice 95**rms135-1494**

Soient X_1 et X_2 , deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi. On pose

$$U = X_1 + X_2, \quad T = X_1 - X_2, \quad Y_1 = \frac{X_1}{U}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{U}.$$

1. Démontrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.

2. Démontrer que Y_1 et Y_2 admettent des moments de tout ordre. Calculer en particulier l'espérance de ces deux variables aléatoires.

3. Démontrer que T/U admet des moments de tout ordre. Calculer son espérance.

4. Exprimer $\mathbf{V}(T/U)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y_1)$.

Exercice 96**rms135-1495**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la probabilité pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Exercice 97**rms135-1496**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et on pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}.$$

1. Démontrer que $Z \leq X$, puis que Z admet une espérance et une variance.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.
3. Déterminer la loi de Z .

Exercice 98**rms135-1497**

L'exercice suivant ressemble à 135-1493 (nous ferons usage de la fonction de répartition), mais il y a une différence majeure : ici, les trois variables aléatoires sont supposées indépendantes.

Soient X_1 , X_2 et X_3 , trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces trois variables aléatoires suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$Z = \min(X_1, X_2, X_3).$$

Exercice 99**rms135-1498**

On pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

1. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Expliciter $S(t)$ pour $t \in]-\mathbf{R}, \mathbf{R}[$.
3. Soit X , une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = \lambda S(t).$$

- a. Que vaut λ ?
- b. Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- c. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 100**rms135-1499**

Soient $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires réelles admettant une variance. On considère alors la matrice

$$S = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

et l'application

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall U = (u_1, \dots, u_n), \quad f(U) = \frac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right).$$

(Il s'agit ici de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.)

1. Démontrer que la matrice S est diagonalisable.
2. Démontrer que

$$\forall U = (u_1, \dots, u_n), \quad U^\top \cdot S \cdot U = \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right).$$

3. On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant :

$$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$$

et on considère un vecteur $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- 3.a. Démontrer que $U^\top \cdot S \cdot U \leq \lambda_1 \|U\|^2$.
- 3.b. En déduire que $f(U) \leq \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1 .
4. Soient $0 < \alpha < 1$ et

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4.a. Donner les valeurs propres de S .
- 4.b. En déduire la valeur de

$$\max_{U \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} f(U)$$

et préciser les vecteurs $U \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels ce maximum est atteint.

Exercice 101**rms135-1579**

Soit X , une variable aléatoire telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier que l'énoncé a un sens.
2. Calculer la fonction génératrice de X .
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 102**rms135-1580**

Soient a et n , deux entiers naturels non nuls. On répartit $N = an$ boules dans n urnes. On pose alors $T_i = 1$ si l'urne i est vide et $T_i = 0$ sinon. On note Y_n , le nombre d'urnes vides et

$$S_n = \frac{Y_n}{n}.$$

1. Proposer un modèle probabiliste pour lequel les $T_1, \dots, T_n, Y_n$ et S_n sont des variables aléatoires.
2. Déduire de ce modèle la loi, l'espérance et la variance de T_i .
3. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

Exercice 103**rms135-1581**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On effectue des tirages avec remise et on note X_n , le rang du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule distincte de la boule obtenue lors du premier tirage.

1. Proposer un modèle probabiliste pour lequel X_n est une variable aléatoire. Déterminer la loi de X_n pour ce modèle. Cette variable aléatoire est-elle presque sûrement finie?
2. Calculer l'espérance de X_n et commenter le résultat obtenu.
3. On note Y_n , le nombre de tirages au terme desquels on a tiré chaque boule au moins une fois.
 - 3.a. Déterminer la loi de Y_2 .
 - 3.b. Calculer $\mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j)$. En déduire la loi de Y_3 .

Exercice 104**rms135-1582**

On dispose d'une urne contenant N boules (avec $N \geq 1$) : il y a r boules blanches (indiscernables entre elles) et $N-r$ boules noires (indiscernables entre elles). On effectue des tirages sans remise et on note X , le nombre de tirages au terme desquels il ne reste plus de boule blanche dans l'urne.

1. Proposer un modèle probabiliste pour lequel X est une variable aléatoire. En déduire la loi de X et son espérance pour $r = 1$ et pour $r = N$.
2. Dans cette question, on suppose que $1 < r < N$.
 - 2.a. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
 - 2.b. Démontrer que

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

3. Donner une relation simple entre $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$ pour $1 \leq q \leq p$. En déduire que

$$\mathbf{E}(X) = r \frac{N+1}{r+1}.$$

(On pourra raisonner par récurrence sur N .)

Exercice 105**rms135-1583**

Soient X et Y , deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = m]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ (avec $0 < p < 1$).

1. Déterminer la loi de (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
4. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 106**rms135-1584**

Soient $0 < p < 1$ et (X, Y) , un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n$$

et que

$$\forall k > n, \quad \mathbf{P}(X = k, Y = n) = 0.$$

1. Déterminer la loi de Y .
2. a. Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.
b. Justifier que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

3. Déterminer la loi de X .

Exercice 107**rms135-1585**

On considère deux réels $0 < \lambda < 1$ et $\alpha > 0$ tels que $(1 + \alpha)\lambda < 1$. On considère que la probabilité pour qu'une famille ait exactement n enfants (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est égale à $\alpha \lambda^n$.

1. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Calculer la somme

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$$

pour $x \in]-1, 1[$.

3. On note p , la probabilité qu'un enfant soit une fille et $q = 1 - p$, la probabilité qu'un enfant soit un garçon.
3. a. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
3. b. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait au moins deux garçons sachant qu'elle en a au moins un.

Exercice 108**rms135-1586**

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables aléatoires suivent la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Rappeler la définition, l'espérance et la variance de la loi de X .
2. On pose

$$U = \min\{X, Y\} \quad \text{et} \quad V = \max\{X, Y\}.$$

Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

3. Même question avec $U + V$ et $V - U$.

Exercice 109**rms135-1587**

Soient X et Y , deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes

et de même loi, d'espérance et de variance finies. On suppose en outre que $X + Y + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (où $0 < p < 1$).

1. Déterminer l'espérance et la variance de X .
2. Déterminer la fonction génératrice de X .
3. En déduire la loi de X .

Exercice 110**rms135-1588**

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que la variable aléatoire X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} = p \in [0, 1].$$

On étudie ici la **moyenne empirique**

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Déterminer l'espérance de M_n .
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbf{V}(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
3. a. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|M_n - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

3. b. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exercice 111**rms135-1589**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on considère la variable aléatoire matricielle

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que X (resp. Y) suit la loi géométrique de paramètre $p_1 > 0$ (resp. de paramètre $p_2 > 0$).
2. a. Calculer $\mathbf{P}(Y > n)$ en fonction de n .
2. b. Quelle est la probabilité pour que M soit diagonalisable ?
3. On suppose que X et Y suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Quelle est la probabilité pour que M soit diagonalisable ?

Solution 1

11-01

1. Comme les A_m sont des événements :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A_m \in \mathcal{A}$$

et qu'une tribu, comme $\mathcal{A}$, est stable par union dénombrable,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \in \mathcal{A}.$$

En tant que tribu, $\mathcal{A}$ est aussi stable par intersection dénombrable, donc

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

et par conséquent la probabilité $P(B)$ est bien définie.

✱ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$B_{n+1} \subset A_n \cup B_{n+1} = B_n$$

donc $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = P(B).$$

2. Par sous-additivité,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq P(B_n) = P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} P(A_m)$$

et comme la série $\sum P(A_m)$ est convergente par hypothèse, le majorant est le reste d'une série convergente. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0.$$

Donc $P(B) = 0$ et finalement $P(B^c) = 1$.

✱ D'après les règles de calcul de l'algèbre booléenne,

$$B^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c \right).$$

On déduit donc de ce qui précède que : presque sûrement, il existe un rang n à partir duquel tous les événements A_m^c sont réalisés, ce qui revient à dire qu'aucun événement A_m avec $m \geq n$ n'est réalisé.

3. a. Par convexité,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad 1 - u \leq \exp(-u)$$

et donc

$$\forall u \in [0, 1], \quad 0 \leq 1 - u \leq \exp(-u).$$

On en déduit que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \prod_{m=N}^N (1 - u_m) \leq \exp\left[-\sum_{m=N}^N u_m\right].$$

Or $\sum u_m$ est une série *divergente* de terme général *positif*, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ et, par composition de limites et encadrement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{m=N}^N (1 - u_m) = 0.$$

3. b. En appliquant ce qui précède à $u_m = P(A_m)$, on a démontré que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{m=N}^N (1 - P(A_m)) = 0.$$

• Comme les événements A_m^c sont indépendants,

$$\prod_{m=n}^N (1 - P(A_m)) = \prod_{m=n}^N P(A_m^c) = P\left(\bigcap_{m=n}^N A_m^c\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements

$$C_N = \bigcap_{m=n}^N A_m^c$$

constituent une suite décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante de P , on en déduit que

$$P\left(\bigcap_{m=n}^N A_m^c\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^N A_m^c\right).$$

Or, par double inclusion (classique),

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^N A_m^c = \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\right) = 0.$$

• Par passage au complémentaire, on en déduit que chaque événement

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

est presque sûr et donc que l'événement

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

en tant qu'intersection dénombrable d'événements presque sûrs, est lui aussi un événement presque sûr.

• Cette fois, presque sûrement, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que les événements A_n soient réalisés.

Solution 2

11-02

L'ensemble vide $\emptyset$ appartient à la tribu $\mathcal{E}$ et comme μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité

$$\mu_1(\emptyset) = 0 = \mu_2(\emptyset),$$

donc $\emptyset \in \mathcal{E}$.

• Si $A \in \mathcal{E}$, alors $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ par définition. Mais $A^c \in \mathcal{E}$ aussi et

$$\mu_1(A^c) = 1 - \mu_1(A) = 1 - \mu_2(A) = \mu_2(A^c),$$

donc $A^c \in \mathcal{E}$.

• Considérons enfin une suite croissante d'événements

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

appartenant à $\mathcal{E}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_1(A_n) = \mu_2(A_n).$$

Comme $\mathcal{E}$ est stable par union dénombrable (comme toute tribu doit l'être), on a donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$$

et par continuité croissante,

$$\mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_2(A_n) = \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Par conséquent,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$$

et l'ensemble $\mathcal{E}$ est bien une "classe monotone".

Solution 3**11-03**

On considère un **ensemble fini ou dénombrable** E et une **loi de probabilité discrète** sur E , c'est-à-dire une famille sommable $(p_x)_{x \in E}$ de réels positifs dont la somme est égale à 1.

On note $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$, la tribu discrète sur E .

- Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable, donc il est légitime de poser

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mu(A) = \sum_{x \in A} p_x.$$

Comme tous les p_x sont positifs, il est clair que

$$0 \leq \mu(A) \leq \sum_{x \in E} p_x = 1$$

donc μ , ainsi définie, est bien une application de $\mathcal{E}$ dans $[0, 1]$.

- Par définition, $\mu(E) = 1$.
- Il reste à démontrer que μ est σ -additive.

Pour cela, on considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de la tribu $\mathcal{E}$ et on pose

$$A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}.$$

La sous-famille $(p_x)_{x \in A}$ étant sommable et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une partition de l'ensemble (fini ou dénombrable) A , on déduit du Théorème de Fubini que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(p_x)_{x \in A_n}$ est sommable ;
- en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sum_{x \in A_n} p_x,$$

- on définit une série convergente $\sum s_n$
- et la somme de cette série vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{x \in A} p_x.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

et la σ -additivité de μ est ainsi démontrée.

- En conclusion, l'application

$$\mu \mapsto (p_x)_{x \in E} = (\mu(\{x\}))_{x \in E}$$

définit une bijection entre les mesures de probabilité μ sur $(E, \mathcal{E})$ et les lois de probabilité discrètes $(p_x)_{x \in E}$.

▮ Chaque mesure de probabilité discrète μ est ainsi caractérisée simplement par la famille $(p_x)_{x \in E}$, donc chaque variable aléatoire discrète X à valeurs dans E est caractérisée par la famille

$$(\mathbf{P}(X = x))_{x \in E},$$

c'est-à-dire par les valeurs qu'elle prend (les $x \in E$) et les fréquences avec lesquelles ces valeurs apparaissent (les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$).

Solution 4**11-04**

1. On commence par **modéliser** la situation.

- On considère un espace probabilisé (abstrait) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont la tribu $\mathcal{A}$ contient au moins deux événements B_1 et B_2 , étant entendu que l'événement B_i indique qu'une boule bleue est tirée lors du i -ème tirage.
- Dans un premier temps, on s'intéresse seulement à l'événement B_1 .

Aucun théorème du cours de probabilités ne permet de calculer la probabilité de B_1 . Deux possibilités se présentent :

- ou bien on choisit *arbitrairement* une valeur pour $\mathbf{P}(B_1)$;
- ou bien on fait une hypothèse *arbitraire* pour compléter notre modèle et on peut alors déduire (en appliquant les règles du calcul des probabilités) la valeur de $\mathbf{P}(B_1)$ de cette hypothèse.

✎ Dans le second cas, on a l'impression d'une réponse plus précise parce qu'on pose un calcul. Néanmoins, le résultat de ce calcul est quand même le reflet d'un choix arbitraire !

Prenons la seconde option pour avoir l'impression de faire quelque chose et **supposons** que la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée soit égale à la proportion de boules de cette couleur.

Il y a 5 boules en tout, dont 3 sont bleues. La **proportion** de boules bleues est donc égale à $\frac{3}{5}$ (c'est un *fait*) et $P(B_1) = \frac{3}{5}$ (ce n'est pas un fait, c'est une conséquence de l'hypothèse que nous venons de faire).

2. Pour calculer la probabilité de $P(B_2)$, nous allons utiliser la formule des probabilités totales au moyen du système complet d'événements (B_1, B_1^c) .

$$P(B_2) = P(B_2 | B_1) P(B_1) + P(B_2 | B_1^c) P(B_1^c)$$

D'après la question précédente,

$$P(B_1) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad P(B_1^c) = 1 - P(B_1) = \frac{2}{5}.$$

✎ Une fois qu'on a défini $P(B_1)$, nous pouvons calculer $P(B_1^c)$ avec certitude : une des règles de calcul vues en cours nous permet de déduire la valeur de $P(B_1^c)$ de la valeur de $P(B_1)$ sans hypothèse supplémentaire.

✎ Pour achever le calcul, il faut connaître les valeurs des deux probabilités conditionnelles. Nous n'avons aucun moyen mathématique de déduire ces deux probabilités des valeurs connues jusqu'ici, il faut donc **compléter** notre modèle probabiliste.

Pour cela, nous reprenons l'hypothèse d'équiprobabilité faite plus haut : la probabilité de tirer une boule bleue lors du second tirage sera, *par hypothèse*, égale à la proportion de boules bleues dans l'urne au moment d'effectuer le second tirage.

✎ Si l'événement B_1 est réalisé, la deuxième urne contient 3 boules blanches et $4 + 1 = 5$ boules, donc nous conviendrons que

$$P(B_2 | B_1) = \frac{5}{8}.$$

Si l'événement B_1^c est réalisé, la deuxième urne contient $4 = 3 + 1$ boules blanches et 4 boules bleues, donc nous conviendrons que

$$P(B_2 | B_1^c) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

✎ On peut alors (*alors seulement !*) appliquer la formule des probabilités totales et en déduire que, d'après le modèle que nous avons choisi,

$$P(B_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 + 8}{40} = \frac{23}{40}.$$

✎ En toute logique, nous devrions également prendre la peine de justifier que le modèle que nous avons choisi est cohérent (= exempt de contradiction). Pour cela, il faudrait étudier la tribu engendrée par les deux événements B_1 et B_2 : ce serait long et assez compliqué.

Solution 5

11-05

1. Commençons par modéliser la situation. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans lequel deux événements A et B vérifient les propriétés suivantes :

$$P(A) = 2P(A^c), \quad P(B | A) = \frac{1}{5}, \quad P(B | A^c) = \frac{1}{20}.$$

✎ Il faut comprendre que l'événement A signifie que le flaveurmètre a été produit dans l'usine 1 et que l'événement B signifie que le flaveurmètre est défectueux.

✎ Il n'est pas utile d'invoquer l'hypothèse d'équiprobabilité, la seule chose qui compte est de définir ces trois probabilités pour pouvoir en déduire toutes les probabilités qui nous intéressent ensuite.

✎ On verra à la fin de l'exercice que ce modèle est **complet** : on aura réussi à déduire toutes les probabilités qui nous intéressent de ces hypothèses et des règles de calcul vues en cours.

✎ On admettra en revanche que ce modèle est **cohérent** (= exempt de contradiction). Il faudrait pour cela considérer la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les deux événements A et B et vérifier que les hypothèses que nous venons de faire permettent de définir une, et une seule, mesure de probabilité discrète sur cette sous-tribu. C'est long et fastidieux...

✎ On peut répondre à la première question : on a supposé que $P(A) = 2P(A^c)$ et on sait que $P(A^c) = 1 - P(A)$, donc $P(A) = \frac{2}{3}$.

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B | A) P(A) + P(B | A^c) P(A^c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8+1}{60} = \frac{3}{20}$$

et par conséquent

$$P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{17}{20}.$$

3. Par définition des probabilités conditionnelles,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)} = \frac{(1/5)(2/3)}{(3/20)} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}.$$

Solution 6

11-06

1.

✎ Le modèle est donné par l'énoncé, il suffit donc d'appliquer les règles de calcul vues en cours.

Mais il faut aussi faire confiance : on **admet** que le modèle proposé est **cohérent** ! Pour vérifier cela, il faudrait étudier la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les trois événements A , B et C et vérifier qu'il existe une, et une seule, mesure de probabilité définie sur les 2^3 atomes de cette sous-tribu qui soit compatible avec les hypothèses faites dans l'énoncé...

On cherche ici à calculer $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$. Comme les événements (A, B, C) sont indépendants, on sait (ou on admet) que les événements contraires (A^c, B^c, C^c) sont indépendants. Par conséquent,

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) P(B^c) P(C^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Posons

$$D_1 = (A \cap B^c \cap C^c), \quad D_2 = (A^c \cap B \cap C^c), \quad D_3 = (A^c \cap B^c \cap C).$$

On cherche ici à calculer la probabilité de

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

♣ Comme A , B et C appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ et qu'une tribu est stable par passage au complémentaire, par union (finie ou dénombrable) et par intersection (finie ou dénombrable), les ensembles D_1 , D_2 , D_3 et D appartiennent aussi à la tribu $\mathcal{A}$, donc la probabilité $P(D)$ est bien définie.

♣ Les trois événements D_1 , D_2 et D_3 sont deux à deux disjoints, car

- $D_1 \subset A$ et $D_2 \subset A^c$, donc $D_1 \cap D_2 \subset A \cap A^c = \emptyset$;
- $D_1 \subset C^c$ et $D_3 \subset C$, donc $D_1 \cap D_3 \subset C \cap C^c = \emptyset$;
- $D_2 \subset B$ et $D_3 \subset B^c$, donc $D_2 \cap D_3 \subset B \cap B^c = \emptyset$.

Par additivité de P ,

$$P(D) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3).$$

Comme les événements A , B et C sont supposés indépendants,

$$P(D_1) = P(A) P(B^c) P(C^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{24},$$

$$P(D_2) = P(A^c) P(B) P(C^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{24},$$

$$P(D_3) = P(A^c) P(B^c) P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24},$$

donc $P(D) = (2 + 3 + 6)/24 = 11/24$.

Solution 7

11-07

1. Il faut d'abord définir un modèle probabiliste. Pour cela, nous *admettons* qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui contient deux événements A et T tels que

$$P(T) = p, \quad P(A | T) = 1, \quad P(A | T^c) = 1/13.$$

✎ L'évènement T signifie qu'on a affaire à un tricheur et l'évènement A que la personne choisie tire un as.

On a **implicitement** fait l'hypothèse que la probabilité de l'évènement T était égale à la proportion p de tricheurs dans la population et que la probabilité pour qu'une personne honnête tire un as soit égale à la proportion d'as dans un paquet de cartes (soit 1 sur 13, puisqu'il s'agit d'un jeu de 52 cartes).

Je rappelle que rien ne peut justifier cette hypothèse d'équiprobabilité en dehors de l'absence d'information précise (et de la nécessité de rendre les calculs aussi simples que possible).

En revanche, la valeur de $P(A | T)$ traduit une information (explicitement) donnée par l'énoncé.

Comme d'habitude, on admet que ce modèle probabiliste est **cohérent** et on pourra constater à la fin de l'exercice qu'il est **complet** (nous n'aurons pas besoin de poser d'hypothèse supplémentaire).

D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements (T, T^c) ,

$$P(A) = P(A | T) P(T) + P(A | T^c) P(T^c) = 1 \cdot p + \frac{1}{13} \cdot (1 - p) = \frac{1 + 12p}{13}.$$

☞ Comme $0 < p < 1$, la valeur de $P(A)$ est comprise entre $1/13$ (cas où il n'y aurait aucun tricheur) et 1 (cas où tous les individus seraient des tricheurs).

Il faut penser à faire ce genre de vérifications aussi souvent que possible afin de s'assurer qu'on n'aboutit pas à un résultat absurde.

2. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$P(T | A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | T) P(T)}{P(A)} = \frac{1 \cdot p \cdot 13}{12p + 1} = \frac{13p}{12p + 1}.$$

☞ S'il n'y a pas de tricheur dans la population ($p = 0$), cette probabilité est nulle.

Si tous les individus sont des tricheurs ($p = 1$), cette probabilité est égale à 1.

Tout est normal !

Solution 8

11-08

Modélisation —

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On admet qu'il existe quatre événements P, N, T_f et T_p dans $\mathcal{A}$ tels que

$$P(N) = 2/9, \quad P(T_f) = 3/9, \quad P(T_p) = 4/9$$

et tels que

$$P(F | N) = 1/2, \quad P(F | T_f) = 1, \quad P(F | T_p) = 0.$$

☞ Les probabilités des événements N, T_f et T_p ont été choisies égales aux proportions de pièces Normales, de pièces avec deux côtés Face et de pièces avec deux côtés Pile dans la boîte. (Appelons cela l'hypothèse d'équiprobabilité lors du choix, aléatoire!, de la pièce.)

On doit remarquer que ces trois événements forment un système complet et que les valeurs choisies pour les probabilités sont cohérentes avec la propriété habituelle des systèmes complets d'événements :

$$P(N) + P(T_f) + P(T_p) = 1.$$

Si les valeurs de $P(F | T_f)$ et $P(F | T_p)$ sont imposées par le bon sens, on fait une nouvelle fois l'hypothèse d'équiprobabilité pour poser $P(F | N) = 1/2$.

Comme d'habitude, on ne prend pas la peine de vérifier que ce modèle est cohérent. (On a quand même pris soin de vérifier la propriété des systèmes complets d'événements!)

On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements (N, T_f, T_p) . D'après le modèle que nous avons choisi,

$$P(F) = P(F | N) P(N) + P(F | T_f) P(T_f) + P(F | T_p) P(T_p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

☞ Il faut garder présent à l'esprit qu'on n'a pas calculé la probabilité $P(F)$! Nous avons en fait calculé cette probabilité dans le cadre d'un modèle que nous avons choisi.

Solution 9

11-09

1. Modélisation —

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en admettant qu'il existe quatre événements V_1, V_2, V_3 et V_4 tels que

$$\mathbf{P}(V_1) = 1/2 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k < 4, \quad \mathbf{P}(V_{k+1} | V_k) = \mathbf{P}(V_{k+1}^c | V_k^c) = 2/3.$$

✎ L'évènement V_k indique le vote de l'indécis lors du k -ième scrutin. On peut supposer (par exemple) que l'évènement V_k est réalisé lorsque l'électeur vote "à gauche". Dans ce cas, l'évènement V_k^c est réalisé lorsque l'électeur vote "à droite".

Dans ce premier modèle, le premier vote est déterminé par le lancer d'une pièce. Sans information supplémentaire, on choisit de faire l'hypothèse d'équiprobabilité et on considère donc que $\mathbf{P}(V_1) = 1/2$.

Ensuite, on traduit au mieux l'indication de l'énoncé en fixant la valeur des probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(V_{k+1} | V_k)$ et $\mathbf{P}(V_{k+1}^c | V_k^c)$ qui traduisent le fait de voter au $(k+1)$ -ième scrutin "comme au k -ième scrutin".

Nous admettons que ce modèle est **cohérent** et nous allons bientôt nous rendre compte qu'il est **incomplet**.

Il s'agit de calculer la probabilité de l'évènement $V_1 \cap V_2 \cap V_3^c \cap V_4^c$, il faut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(V_1 V_2 V_3^c V_4^c) = \mathbf{P}(V_1) \mathbf{P}(V_2 | V_1) \mathbf{P}(V_3^c | V_1 V_2) \mathbf{P}(V_4^c | V_1 V_2 V_3^c).$$

✎ Le modèle que nous avons défini nous donne les valeurs des deux premiers facteurs mais pas celles des deux derniers. Il faut donc le compléter pour pouvoir terminer ce calcul.

Lorsqu'un processus aléatoire $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas constitué d'une succession d'évènements indépendants (ce qui est ici le cas), on recourt souvent à une hypothèse simplificatrice : l'**hypothèse de Markov**.

Nous allons donc supposer que

$$\mathbf{P}(V_3^c | V_1 V_2) = \mathbf{P}(V_3^c | V_2) \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(V_4^c | V_1 V_2 V_3^c) = \mathbf{P}(V_4^c | V_3^c).$$

Il est important de bien comprendre que ces deux égalités ne peuvent pas se déduire du modèle probabiliste initial au moyen des règles de calcul vues en cours — ce sont bien des hypothèses supplémentaires que nous ajoutons au modèle.

Et nous admettrons une fois de plus que les propriétés que nous tirons de l'hypothèse de Markov n'introduisent pas de contradiction dans notre modèle probabiliste (qui reste donc **cohérent** en devenant **complet**).

On déduit de l'hypothèse de Markov que

$$\mathbf{P}(V_1 V_2 V_3^c V_4^c) = \mathbf{P}(V_1) \mathbf{P}(V_2 | V_1) (1 - \mathbf{P}(V_3 | V_2)) \mathbf{P}(V_4^c | V_3^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

2. Puisque la situation a changé (ne serait-ce que l'étape initiale du processus aléatoire), il faut changer de modèle.

✎ Pour changer de modèle probabiliste, il y a deux possibilités :

— conserver les notations utilisées pour représenter les événements étudiés et changer de mesure de probabilité (= remplacer la mesure initiale $\mathbf{P}$ par une nouvelle mesure $\mathbf{P}_0$)

— ou conserver l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et changer de notations pour les événements.

La théorie de Kolmogorov nous indique que l'espace probabilisé abstrait $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est assez vaste pour que tout modèle "raisonnable" (= pas immédiatement contradictoire) soit cohérent.

Nouvelle modélisation —

On admet qu'il existe deux événements R_1 et R_2 dans $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbf{P}(R_1) = 1/4 \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(R_2 | R_1) = 2/3.$$

✎ On note cette fois R_k , l'évènement qui traduit le fait de voter "à gauche" lors du k -ième scrutin.

L'hypothèse d'équiprobabilité nous a conduit à poser $\mathbf{P}(R_1) = 1/4$ (= la proportion de boules rouges dans l'urne).

Nous admettons une fois de plus que ce modèle est cohérent.

Nous cherchons à calculer $\mathbf{P}(R_2^c)$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements (R_1, R_1^c) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_2^c) &= \mathbf{P}(R_1) \mathbf{P}(R_2^c | R_1) + \mathbf{P}(R_1^c) \mathbf{P}(R_2^c | R_1^c) \\ &= \mathbf{P}(R_1) (1 - \mathbf{P}(R_2 | R_1)) + (1 - \mathbf{P}(R_1)) \mathbf{P}(R_2^c | R_1^c) \\ &= 1/4 \cdot 1/3 + 3/4 \cdot 2/3 = 7/12. \end{aligned}$$

✎ La règle de calcul $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ vaut pour toutes les mesures de probabilité, donc aussi pour la mesure $\mathbf{P}_{R_1}$. Pour cette raison, on a

$$\mathbf{P}(R_2^c | R_1) = \mathbf{P}_{R_1}(R_2^c) = 1 - \mathbf{P}_{R_1}(R_2).$$

Solution 10**11-10****1. a. Modélisation —**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un système complet d'événements (M_1, M_2, M_3) et un événement D . On suppose que

$$\mathbf{P}(M_1) = \frac{2}{10}, \quad \mathbf{P}(M_2) = \frac{3}{10}, \quad \mathbf{P}(M_3) = \frac{5}{10}$$

et que

$$\mathbf{P}(D | M_1) = \frac{1}{100}, \quad \mathbf{P}(D | M_2) = \frac{2}{100}, \quad \mathbf{P}(D | M_3) = \frac{3}{100}.$$

☞ Une fois encore, on s'appuie sur l'hypothèse d'équiprobabilité : les probabilités (et, le cas échéant, les probabilités conditionnelles) sont choisies égales aux proportions constatées dans la réalité.

On prend soin de vérifier que $\frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 1$ (c'est la moindre des choses pour un système complet d'événements !), mais à part ça, on admet que le modèle ainsi défini est cohérent.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(D) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}(D | M_k) \mathbf{P}(M_k) = \frac{2 + 6 + 15}{1000} = \frac{23}{1000}.$$

Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(M_2 | D) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{\mathbf{P}(D | M_2) \mathbf{P}(M_2)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{6}{23} \approx \frac{1}{4}.$$

1. b. On trouve de même que

$$\mathbf{P}(M_1 | D) = \frac{2}{23} \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(M_3 | D) = \frac{15}{23}$$

et on constate que la somme de ces trois probabilités conditionnelles est égale à 1 — ce qui, à nouveau, est la moindre des choses pour un système complet d'événements.

☞ En effet, quel que soit le système complet d'événements $(A_k)_{0 \leq k < N}$, comme

$$\bigsqcup_{0 \leq k < N} A_k = \Omega,$$

alors, pour toute mesure de probabilité $\mathbf{P}$,

$$\sum_{0 \leq k < N} \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

et donc, pour tout événement $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\sum_{0 \leq k < N} \mathbf{P}(A_k | B) = \sum_{0 \leq k < N} \mathbf{P}_B(A_k) = \mathbf{P}_B(\Omega) = 1.$$

Bien entendu, cette propriété s'étend aux systèmes complets d'événements dénombrables (puisque toute mesure de probabilité est non seulement additive, mais aussi σ -additive).

On a donc

$$\mathbf{P}(M_1 | D) < \mathbf{P}(M_1), \quad \mathbf{P}(M_2 | D) < \mathbf{P}(M_2), \quad \mathbf{P}(M_3 | D) > \mathbf{P}(M_3).$$

2. Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(M_2 | D^c) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap D^c)}{\mathbf{P}(D^c)} = \frac{\mathbf{P}(D^c | M_2) \mathbf{P}(M_2)}{\mathbf{P}(D^c)} = \frac{98 \cdot 3}{977} \approx \frac{3}{100}.$$

☞ Une fois encore, on a appliqué la règle de calcul relative au passage au complémentaire :

$$\mathbf{P}(D^c | M_2) = \mathbf{P}_{M_2}(D^c) = 1 - \mathbf{P}_{M_2}(D) = 1 - \mathbf{P}(D | M_2)$$

qui vaut pour toutes les mesures de probabilité (pour $\mathbf{P}$ et pour $\mathbf{P}_{M_2}$).

Solution 11**11-11**

1. Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k^c \subset \Omega.$$

Par hypothèse, les A_k sont des événements (autrement dit : $A_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), donc l'ensemble B_n appartient à la tribu $\mathcal{A}$ (stabilité de la tribu par intersection finie ou dénombrable). L'événement B_n signifie qu'aucune des n premières particules n'a atteint sa cible.

Il s'agit ici de calculer la probabilité de

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k = B_n^c \in \mathcal{A}.$$

Comme les événements A_k sont indépendants, les événements A_k^c sont indépendants eux aussi, donc

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k^c) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(A_k)) = (1 - p)^n.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(B_n^c) = 1 - \mathbf{P}(B_n) = 1 - (1 - p)^n.$$

On peut aussi modéliser cette expérience aléatoire par la donnée d'une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

En posant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A_k = [X_k = 1],$$

on constate que ces deux modèles sont équivalents.

On peut alors définir une nouvelle variable aléatoire discrète : l'instant T du premier succès en posant

$$T(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* : X_k(\omega) = 1\}$$

et en convenant que $T(\omega) = +\infty$ lorsque l'ensemble est vide. Le cours montre que T est bien une variable aléatoire discrète qui est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$). Conditionnellement à l'événement $[T \in \mathbb{N}^*]$, la loi de T est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = k \mid T \in \mathbb{N}^*) = p(1 - p)^{k-1}.$$

L'événement étudié dans cette première question est $[T \leq n]$.

2. On cherche un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(B_N^c) \geq 0,8$, c'est-à-dire $(1 - p)^N \leq 0,2$. Il suffit pour cela que

$$N \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(1-p)}.$$

Attention, comme $0 < p < 1$, on divise par un réel strictement négatif — ce qui nous donne, comme on pouvait s'y attendre, une minoration de N (et pas une majoration !).

Solution 12**11-12****1. Modélisation —**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements tels que

$$\mathbf{P}(A_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k^c) = p.$$

Nous allons maintenant étudier la suite de terme général $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

On interprète l'événement A_k comme le fait que l'information reçue par la k -ième personne soit correcte. On considère que l'émetteur dispose de l'information correcte en supposant que $\mathbf{P}(A_0) = 1$.

L'énoncé impose une condition sur la transmission de l'information : une transmission fidèle conserve aussi bien l'information correcte, que l'information incorrecte. C'est pourquoi on a imposé la même valeur aux deux probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k)$ et $\mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k^c)$.

Par passage au complémentaire, on déduit de ces hypothèses que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k^c) = 1 - p.$$

Il ne s'agit pas d'une hypothèse supplémentaire, mais d'une conséquence rigoureusement déduite de notre modèle au moyen d'une règle de calcul vue en cours.

Pour justifier que notre modèle a bien un sens (et en particulier qu'il est cohérent), il faudrait appliquer un théorème dû à Kolmogorov.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (A_n, A_n^c) est un système complet d'événements, on déduit de la formule des probabilités totales que

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n) P(A_n) + P(A_{n+1} | A_n^c) P(A_n^c)$$

c'est-à-dire

$$p_{n+1} = p \cdot p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$

2. On a démontré que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était une suite arithmético-géométrique.

✎ On doit connaître la méthode pour exprimer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

L'unique solution de l'équation $\ell = (2p-1)\ell + (1-p)$ est $\ell = 1/2$.

Par conséquent, la suite de terme général $p_n - 1/2$ est une suite géométrique, de raison $(2p-1)$ et de terme initial $1/2$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n - 1/2 = (2p-1)^n \cdot 1/2.$$

3. Pour $0 < p < 1$, la raison $2p-1$ appartient à l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1/2$ (le point fixe).

Solution 13

11-13

Par définition,

$$\begin{aligned} P_B(A \cap C) &= P_B(A) P_B(C) \iff P(A \cap C \cap B) = P(A \cap B) P_B(C) \\ &\iff P(C \cap (A \cap B)) = P(A \cap B) P_B(C) \\ &\iff P_{A \cap B}(C) = P_B(C) \end{aligned}$$

en admettant bien entendu que $P(A \cap B) > 0$.

Solution 14

11-14

On décompose A dans le système complet d'événements (B, B^c) : comme

$$A = [A \cap B] \sqcup [A \cap B^c],$$

alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A | B) P(B) + P(A | B^c) P(B^c) \\ &= P(A | B) [P(B) + P(B^c)] \quad (\text{car } P(A | B) = P(A | B^c)) \\ &= P(A | B). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = P(A) P(B)$$

et donc que les deux événements A et B sont indépendants.

✎ Attention, cet exercice est assez astucieux : si on s'y prend de la bonne manière, la démonstration est simple et rapide — mais si on part d'une autre manière, on risque de tourner en rond un certain temps...

Solution 15

11-15

Comme P_B est une mesure de probabilité, on a nécessairement $P(A | B) = P_B(A) \leq 1$.

D'autre part,

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$$

donc $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1/2$. Par définition des probabilités conditionnelles, on en déduit que

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{2}{3}.$$

Solution 16**12-01**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[|X| \geq n]$ est un évènement en tant qu'image réciproque de l'intervalle $[n, +\infty[$ par la variable aléatoire $|X|$.

On peut aussi décomposer cet ensemble en une union, finie ou dénombrable, d'évènements :

$$[|X| \geq n] = \bigsqcup_{\substack{x \in E \\ |x| \geq n}} [X = x].$$

Rappelons que $[X = x] \in \mathcal{A}$ pour tout x par hypothèse (puisque X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$).

• Dans la suite de l'exercice, toutes les parties de Ω considérées pourront s'exprimer au moyen du système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X (= comme une union finie ou dénombrable d'évènements de la forme $[X = x]$) et appartiendront donc bien à la tribu $\mathcal{A}$.

On n'exposera pas les détails.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad |X(\omega)| \geq n+1 \implies |X(\omega)| \geq n$$

donc

$$[|X| \geq n+1] \subset [|X| \geq n].$$

La famille $([|X| \geq n])_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante d'évènements.

• Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$, on sait alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [|X| \geq n]\right).$$

Mais $|X(\omega)| \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc

$$\forall \omega \in \Omega, \exists n \in \mathbb{N}, \quad |X(\omega)| < n$$

donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [|X| \geq n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [|X| < n]^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [|X| < n] \right)^c = \Omega^c = \emptyset$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

2. Pour tout $x \in E$, le réel $|x|$ est positif, donc il existe un, et un seul, entier naturel $n = \lfloor |x| \rfloor$ tel que $|x| \in E_n$. On dispose donc d'une partition de l'ensemble E :

$$E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

• Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors la famille $(x \mathbf{P}(X = x))_{x \in E}$ est sommable (définition de l'espérance).

Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable, donc la famille

$$(x \mathbf{P}(X = x))_{x \in E_n}$$

est sommable pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que chaque somme σ_n est bien définie.

Comme les ensembles E_n forment une partition de E , on déduit du Théorème de Fubini que la famille $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est sommable. Autrement dit, la série $\sum \sigma_n$ (de terme général positif) est convergente.

Le Théorème de Fubini nous dit aussi que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n = \sum_{x \in E} |x| \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{E}(|X|)$$

mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété ici.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |X(\omega)| \geq n &\iff \exists! k \geq n, \quad k \leq |X(\omega)| < k+1 \\ &\iff \exists! k \geq n, \quad X \in E_k. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$[|X| \geq n] = \bigcup_{k \geq n} [X \in E_k].$$

On a décomposé l'évènement $[|X| \geq n]$ en une union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints. Par σ -additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que la famille $(\mathbf{P}(X \in E_k))_{k \geq n}$ est sommable et que

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X \in E_k).$$

• Soit $k \geq n$. Comme d'habitude,

$$[X \in E_k] = \bigcup_{x \in E_k} [X = x].$$

Il s'agit à nouveau d'une union finie ou dénombrable d'évènements deux à deux disjoints, donc, à nouveau par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(X \in E_k) = \sum_{x \in E_k} \mathbf{P}(X = x).$$

Par définition de l'ensemble E_k , on a $|x| \geq k \geq n$ pour tout $x \in E_k$, donc

$$\forall x \in E_k, \quad n \mathbf{P}(X = x) \leq |x| \mathbf{P}(X = x).$$

En sommant sur $x \in E_k$, on en déduit que

$$n \mathbf{P}(X \in E_k) = \sum_{x \in E_k} n \mathbf{P}(X = x) \leq \sum_{x \in E_k} |x| \mathbf{P}(X = x) = \sigma_k.$$

• En sommant sur $k \geq n$, on en déduit que

$$0 \leq n \mathbf{P}(|X| \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} n \mathbf{P}(X \in E_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sigma_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme la série $\sum \sigma_k$ est convergente, son reste tend vers 0 et, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbf{P}(|X| \geq n) = 0.$$

• L'inégalité de Markov, sous les mêmes hypothèses, nous dit seulement que

$$n \mathbf{P}(|X| \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1),$$

ce qui est sensiblement moins précis !

Solution 17

12-02

1. Comme φ est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$, en chaque point son graphe est situé au-dessus de sa tangente :

$$\forall x_0, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi'(x_0).$$

En particulier, avec $x_0 = \mathbf{E}(X)$ et $a = \varphi'(x_0)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq a[x - \mathbf{E}(X)] + \varphi(\mathbf{E}(X)).$$

• Comme la fonction φ est convexe sur un intervalle ouvert, elle est en fait continue et admet, en tout point, une dérivée à gauche et une dérivée à droite. De plus, par convexité,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$$

et on peut démontrer que, pour tout réel a compris entre $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) + a \cdot (x - x_0).$$

Les droites d'équation $y = a \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0)$ avec $f'_g(x_0) \leq a \leq f'_d(x_0)$ sont appelées **droites d'appui**.

2. On applique la majoration précédente pour $x = X(\omega)$:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \varphi(X(\omega)) \leq a \cdot (X - E(X)) + \varphi(E(X)).$$

Comme l'espérance conserve les inégalités, on en déduit que

$$E(\varphi(X)) \leq E[a \cdot (X - E(X)) + \varphi(E(X))] = a E[X - E(X)] + \varphi(E(X)) = \varphi(E(X))$$

par linéarité.

➤ Quelle que soit la variable aléatoire X d'espérance finie, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée. Par ailleurs, si Y est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à b , alors $E(Y) = b$.

♣ Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, la variable aléatoire X^2 n'est pas forcément d'espérance finie, mais elle est positive.

Si X^2 est d'espérance finie, on peut appliquer l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $[t \mapsto t^2]$.

Sinon, la convention habituelle fait que l'inégalité

$$E(X^2) \geq E(X)^2$$

est encore vraie, même si elle est dépourvue de tout intérêt.

➤ Par convention, si Y est une variable aléatoire positive qui n'est pas d'espérance finie, son espérance est égale à $+\infty$. Et majorer par $+\infty$, ce n'est jamais faux — ni jamais utile.

Solution 18

12-03

On sait que $E(S_n) = np$ et que $V(S_n) = npq$ (avec $q = 1 - p$ comme d'habitude).

D'autre part, comme

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - p \right| \geq \varepsilon \iff |S_n(\omega) - np| \geq n\varepsilon,$$

on déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|S_n - E(S_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Comme $0 < p < 1$, alors $0 < pq \leq 1/4$ et donc

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

➤ Le graphe de $[x \mapsto x(1-x)]$ est une parabole qui coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et en $x = 1$, donc son sommet est situé en $x = 1/2$ (au milieu des deux racines), ce qui donne le maximum de $x(1-x)$.

Solution 19

12-04

Les variables aléatoires X et Y sont bornées (elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs), donc elles admettent toutes deux un moment d'ordre 2 et leur covariance est bien définie.

♣ Par définition de l'espérance,

$$E(X) = -P(X = -1) + P(X = 1) = 0.$$

Comme les valeurs prises par X sont ± 1 et 0 , alors les deux variables aléatoires X et X^3 sont égales, donc $E(X^3) = 0$.

➤ Les variables aléatoires X et X^3 ne sont pas seulement égales en loi, elles sont aussi égales en tant qu'applications de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad [X(\omega)]^3 = X(\omega).$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\text{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0$$

donc X et X^2 sont décorrélées (alors que X^2 est une fonction de X !).

Solution 20**13-01**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 21**13-02**

- 1.
- 2.

Solution 22**13-03**

- 1.
- 2.

Solution 23**13-04**

- 1.
- 2.

Solution 24**13-05****Solution 25****13-06**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 26**13-07**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 27**13-08**

- 1.
- 2.

Solution 28**13-09**

- 1.
- 2.

Solution 29**13-10**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 30**13-11**

- 1.
- 2.

Solution 31**13-12**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 32**13-13**

- 1.
- 2.

Solution 33**13-14**

- 1.
- 2.

Solution 34**13-15**

- 1.
- 2.
- 3.

Solution 35**kh14-01**

1. Comme X est une variable aléatoire positive d'espérance finie, on peut appliquer l'inégalité de Markov.

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\alpha}$$

On sait que $\mathbf{E}(X) = p = n$. En prenant $\alpha = n^2$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X \geq n^2) \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

▮ On peut effectuer un calcul plus précis en prenant en compte que X suit une loi géométrique. En effet, en notant p , le paramètre de la loi géométrique et $q = 1 - p$,

$$\mathbf{P}(X \geq n^2) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k \geq n^2} [X = k]\right) = \sum_{k=n^2}^{+\infty} pq^{k-1} = q^{n^2-1}.$$

(Méthode habituelle : on décompose un évènement au moyen du système complet d'évènements associé à une variable aléatoire discrète pour utiliser ensuite la σ -additivité de $\mathbf{P}$.)

Ici, avec $p = 1/n$, on obtient

$$\mathbf{P}(X \geq n^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp[n^2 \ln(1 - 1/n)]$$

et, par concavité du logarithme,

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(X \geq n^2) \leq e^{-n}.$$

La majoration obtenue par l'inégalité de Markov est donc extrêmement grossière !

2. Comme X est une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2, on peut aussi appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}$$

On sait que $\mathbf{V}(X) = q/p^2 = \frac{n^3}{n-1}$. Avec $\alpha = n$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(|X - n| \geq n) \leq \frac{n}{n-1} = 1 - \frac{1}{n}.$$

✱ Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |X(\omega) - n| \geq n &\iff X(\omega) - n \geq n \quad \text{ou} \quad X(\omega) - n \leq -n \\ &\implies X(\omega) \geq 2n. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$[X \geq 2n] \subset [X \leq 0] \sqcup [X \geq 2n] = [|X - n| \geq n]$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(X \geq 2n) \leq \mathbf{P}(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

▮ Considérons l'évènement contraire : comme X est une variable aléatoire à valeurs entières non nulles,

$$[|X - n| < n] = [0 < X < 2n] = [1 \leq X < 2n] = [X < 2n]$$

donc $[|X - n| \geq n] = [X \geq 2n]$ et comme X suit une loi géométrique,

$$P(|X - n| \geq n) = P(X \geq 2n) = q^{2n-1} = (1 - 1/n)^{2n-1} \leq \frac{n}{n-1} \cdot e^{-2}$$

(toujours par concavité du logarithme).

Ici encore, on constate que l'estimation donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (qui tient compte de l'espérance et de la variance de la variable mais pas de la loi de cette variable) est vraiment grossière : au lieu d'un majorant de l'ordre de $1/10$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous propose un majorant qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire un majorant "asymptotiquement inutile".

Solution 36

kh14-02

On sait que $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ si, et seulement si, la famille

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\mu(\{n\}))_{n \in \mathbb{N}}$$

est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

Analyse —

Supposons qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n.$$

• En particulier, pour $n = 0$, on a donc $\mu(\mathbb{N}) = \lambda a_0$, donc il faut que $\lambda a_0 = 1$. La seule valeur possible de λ est donc $1/a_0$.

• Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{n, n+1, \dots\} = \{n\} \sqcup \{n+1, n+2, \dots\}.$$

Par additivité de P , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n\}) = \lambda(a_n - a_{n+1}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}.$$

Nous avons ainsi démontré l'unicité du facteur λ et l'unicité de la mesure μ .

Synthèse —

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}.$$

• Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *strictement* décroissante et tend vers 0, les a_n sont tous *strictement* positifs. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie (le réel a_0 n'est pas nul) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est (strictement) positif car $a_n - a_{n+1} > 0$ et $a_0 > 0$.

• La série $\sum u_n$ est une série télescopique. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est, par hypothèse, convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente. Comme il s'agit d'une série de terme général positif, on en déduit que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

• En tant que somme d'une série télescopique,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a_0} \left(a_0 - \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right] \right) = \frac{a_0 - 0}{a_0} = 1.$$

• La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une loi de probabilité discrète. Il existe donc une mesure de probabilité discrète μ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n\}) = u_n.$$

Comme μ est σ -additive et que

$$\{n, n+1, \dots\} = \bigsqcup_{k \geq n} \{k\},$$

on en déduit que cette mesure μ vérifie la condition imposée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(\{k\}) = \frac{a_n}{a_0}$$

(nouvelle somme télescopique).

Solution 37**kh14-03****Modélisation —**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'évènements indépendants tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(A_k) = 1/n.$$

🔗 Comme d'habitude, on admet que ce modèle est cohérent.

♣ Plutôt que de considérer l'évènement $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (= il existe au moins un succès), nous allons considérer l'évènement contraire :

$$\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \right)^c = \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k^c.$$

Comme les évènements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendants, (on sait ou on admet que) les évènements contraires $(A_k^c)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendants, donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k\right) = 1 - \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - \mathbf{P}(A_k)) = 1 - (1 - 1/n)^n.$$

♣ Par concavité de la fonction $\ln$, on sait que

$$\forall 0 \leq x \leq 1, \quad \ln(1-x) \leq -x.$$

En particulier, pour $x = 1/n$, on en déduit que

$$n \ln(1 - 1/n) \leq -1$$

et donc que

$$(1 - 1/n)^n \leq e^{-1}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k\right) = 1 - (1 - 1/n)^n \geq 1 - 1/e.$$

Solution 38**kh14-04****Modélisation —**

Le plus simple est de considérer une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = q, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = p_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 2) = p_2.$$

🔗 Chaque variable aléatoire X_n décrit le résultat de la manche n (qu'elle soit réellement jouée ou non!) : résultat nul pour $[X_n = 0]$; victoire de J_1 pour $[X_n = 1]$ et victoire de J_2 pour $[X_n = 2]$.

Position du problème —

Pour $i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, le joueur J_i remporte le tournoi à l'issue de la manche n lorsque

$$\underbrace{X_1(\omega) = \dots = X_{n-1}(\omega) = 0}_{\text{résultats nuls}} \quad \text{et} \quad X_n(\omega) = i.$$

Comme les X_k sont, par hypothèse, des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad [X_k = i] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$,

$$B_{n,i} = \left(\bigcap_{1 \leq k < n} [X_k = 0] \right) \cap [X_n = i] \in \mathcal{A}$$

(intersection d'un nombre fini d'évènements) et

$$V_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_{n,i} \in \mathcal{A}$$

(union dénombrable d'évènements).

La "réalisation" de l'évènement $B_{n,i}$ signifie que le joueur J_i remporte le tournoi à l'issue de la manche n et la réalisation de l'évènement V_i signifie que le joueur J_i remporte le tournoi (à l'issue d'une manche quelconque).

Probabilité de victoire —

Comme les variables aléatoires X_k , $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes,

$$\forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(B_{n,i}) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 0) \right) \cdot P(X_n = i) = q^{n-1} p_i.$$

Si $1 \leq m < n$, alors

$$\begin{aligned} B_{m,i} &= [X_1 = 0] \cap \dots \cap [X_{m-1} = 0] \cap [X_m = i] && \subset [X_m = i], \\ B_{n,i} &= [X_1 = 0] \cap \dots \cap [X_{m-1} = 0] \cap [X_m = 0] \cap \dots \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = i] && \subset [X_m = 0] \end{aligned}$$

donc

$$B_{m,i} \cap B_{n,i} \subset [X_m = i] \cap [X_m = 0] = \emptyset.$$

Par conséquent, les évènements V_i sont des unions dénombrables d'évènements deux à deux disjoints et, par σ -additivité de P ,

$$P(V_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_{n,i}) = \frac{p_i}{1-q}.$$

Probabilité de terminaison —

Le tournoi s'achève lorsqu'il y a un vainqueur, c'est-à-dire lorsque l'évènement $V_1 \cup V_2$ est "réalisé". Ces deux évènements sont disjoints (il ne peut y avoir deux vainqueurs différents!), donc

$$P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) = \frac{p_1 + p_2}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1.$$

Ainsi, presque sûrement, le tournoi connaît un vainqueur.

Le presque sûrement n'est pas une précision inutile. En effet, l'ensemble

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [X_n = 0] = (V_1 \cup V_2)^c$$

est un évènement (intersection dénombrable d'évènements) non vide bien qu'il soit négligeable.

Autre modèle (incomplet) —

Pour démontrer que le tournoi prend fin presque sûrement, on peut considérer qu'il s'agit d'une succession d'épreuves indépendantes, chaque épreuve ayant la probabilité $p = (p_1 + p_2)$ de réussir.

Dans ces conditions, on peut modéliser l'instant du premier succès par une variable aléatoire T de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et l'évènement $[T = n]$ signifie que le tournoi s'achève à l'issue de la manche n . On sait alors que $P(T < +\infty) = 1$: le tournoi prend fin presque sûrement au bout d'un nombre fini (mais aléatoire!) de parties.

Ce second modèle est cohérent avec le précédent dans la mesure où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = P(B_{n,1}) + P(B_{n,2}) = P(B_{n,1} \cup B_{n,2}).$$

Mais ce modèle est incomplet car il ne permet pas de calculer les probabilités $P(V_1)$ et $P(V_2)$.

Solution 39

kh14-05

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n = \{n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{E}$ et il est clair que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties deux à deux disjointes. Par σ -additivité de μ , on en déduit que série $\sum \mu(A_n)$ est convergente.

En particulier, son terme général tend vers 0!

Solution 40

kh14-06

On modélise les appels téléphoniques par une famille

$$(X_{k,n})_{n \geq 1, 1 \leq k \leq r}$$

de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles suivent toutes la loi $\mathcal{B}(p)$ en convenant que l'évènement $[X_{k,n} = 1]$ signifie qu'on réussit à joindre la personne k lors du n -ième appel.

► Pour $1 \leq k \leq r$, on note T_k , le nombre d'appels nécessaires pour joindre le k -ième correspondant. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [T_k = n] = [X_{k,1} = 0, \dots, X_{k,n-1} = 0] \cap [X_{k,n} = 1]$$

et d'après notre modèle

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T_k = n) = q^{n-1}p$$

ce qui signifie que les variables aléatoires T_k suivent toutes la loi $\mathcal{G}(p)$.

► D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $T_1, \dots, T_r$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} T_1 &= f(X_{1,n}, n \in \mathbb{N}^*), \\ T_2 &= f(X_{2,n}, n \in \mathbb{N}^*), \dots, \\ T_r &= f(X_{r,n}, n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Le nombre total d'appels passés pour réussir à joindre chacun des r correspondants est défini par

$$X = T_1 + T_2 + \dots + T_r.$$

Comme les variables aléatoires T_k sont indépendantes et de même loi,

$$\forall x \in [0, 1], \quad \mathbf{E}(x^X) = [\mathbf{E}(x^{T_1})]^r$$

et comme T_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad G_X(x) = \mathbf{E}(x^X) = \left(\frac{px}{1-qx} \right)^r.$$

► Comme le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{(n \geq 1)} pq^{n-1}x^n$$

est égal à $1/q > 1$, on déduit du produit de Cauchy que la fonction génératrice G_X est développable en série entière sur $] -1/q, 1/q[$ et en particulier qu'elle est deux fois dérivable en $x = 1$.

Par conséquent, X admet un moment d'ordre deux et est aussi une variable d'espérance finie.

► Pour calculer l'espérance et la variance de X sans efforts, on doit se souvenir qu'il s'agit de la somme de r variables géométriques indépendantes de paramètre p :

— par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = r\mathbf{E}(T_1) = \frac{r}{p}$$

— par indépendance des termes,

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{k=1}^r \mathbf{V}(T_k) = r\mathbf{V}(T_1) = \frac{rq}{p^2}.$$

► Mais on peut aussi dériver deux fois la fonction génératrice pour obtenir ce résultat.

Allons-y avec méthode !

✱ Considérons la fonction génératrice de la loi $\mathcal{G}(p)$:

$$\forall 0 \leq x < \frac{1}{q}, \quad F(x) = \frac{px}{1-qx}$$

On a donc

$$\forall 0 \leq x < \frac{1}{q}, \quad F'(x) = \frac{p(1-qx) - px(-q)}{(1-qx)^2} = \frac{p}{(1-qx)^2}$$

et aussi

$$\forall 0 \leq x < \frac{1}{q}, \quad F''(x) = \frac{2pq}{(1-qx)^3}.$$

✱ On en déduit (dérivation d'une fonction composée) que

$$\forall 0 \leq x < \frac{1}{q}, \quad G'(x) = rF'(x)(F(x))^{r-1}.$$

En particulier, puisque $F(1) = 1$ (fonction génératrice!!),

$$G'(1) = rF'(1) = \frac{rp}{(1-q)^2} = \frac{r}{p}$$

et

$$\begin{aligned} G''(1) &= rF''(1)(F(1))^{r-1} + r(r-1)(F'(1))^2(F(1))^{r-2} \\ &= rF''(1) + r(r-1)(F'(1))^2 \\ &= \frac{2pqr}{p^3} + \frac{r(r-1)p^2}{p^4} \\ &= \frac{(2q+r-1)r}{p^2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$E(X) = G'(1) = \frac{r}{p}$$

et que

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \frac{(2q+r-1)r + rp - r^2}{p^2} = \frac{qr}{p^2}.$$

Solution 41

kh14-06 bis

On modélise les appels téléphoniques par une famille

$$(X_{k,n})_{n \geq 1, 1 \leq k \leq r}$$

de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles suivent toutes la loi $\mathcal{B}(p)$ en convenant que l'événement $[X_{k,n} = 1]$ signifie qu'on réussit à joindre la personne k lors du n -ième appel.

► Pour $1 \leq k \leq r$, on note T_k , le nombre d'appels nécessaires pour joindre le k -ième correspondant. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [T_k = n] = [X_{k,1} = 0, \dots, X_{k,n-1} = 0] \cap [X_{k,n} = 1]$$

et d'après notre modèle

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T_k = n) = q^{n-1}p$$

ce qui signifie que les variables aléatoires T_k suivent toutes la loi $\mathcal{G}(p)$.

► D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $T_1, \dots, T_r$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} T_1 &= f(X_{1,n}, n \in \mathbb{N}^*), \\ T_2 &= f(X_{2,n}, n \in \mathbb{N}^*), \dots, \\ T_r &= f(X_{r,n}, n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Chaque variable T_k donne également le nombre d'heures au terme desquelles on aura réussi à joindre le k -ième correspondant.

Le **nombre d'heures passées pour réussir à joindre chacun des r correspondants** est donc défini par

$$T = \max\{T_1, T_2, \dots, T_r\}.$$

► On aura réussi à joindre les r correspondants en n heures au plus si, et seulement si, pour tout $1 \leq k \leq r$, on aura réussi à joindre le k -ième correspondant en n heures au plus :

$$T(\omega) \leq n \iff \forall 1 \leq k \leq r, \quad T_k(\omega) \leq n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [T \leq n] = \bigcap_{1 \leq k \leq r} [T_k \leq n].$$

Comme les variables aléatoires T_k sont indépendantes et de même loi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(T \leq n) = \prod_{k=1}^r \mathbf{P}(T_k \leq n) = (1 - q^n)^r.$$

En particulier, $P(T \leq 0) = 0$ et la loi de T se déduit des relations précédentes avec

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, \quad P(T = n) &= P(T \leq n) - P(T \leq n-1) \\ &= (1 - q^n)^r - (1 - q^{n-1})^r.\end{aligned}$$

► En particulier, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$P(T = n) \sim r p q^{n-1}$$

(puisque q^n tend vers 0).

On en déduit que les séries $\sum n^k P(T = n)$ sont (absolument) convergentes pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et donc que T admet des moments de tout ordre.

► Le calcul de la fonction génératrice de T est assez complexe...

L'équivalent qu'on vient de calculer prouve que le rayon de convergence de la série entière est égal à $1/q$ mais nous allons provisoirement calculer sur $[0, 1[$.

Pour $0 \leq x < 1$, on peut invoquer la linéarité de $\sum$ et, au moyen d'un changement d'indice,

$$G(x) = (1 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^r x^n.$$

D'après la formule du binôme,

$$(1 - q^n)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k q^{nk}.$$

Comme on fait ainsi apparaître $r + 1$ séries absolument convergentes, on peut sommer terme à terme :

$$\begin{aligned}G(x) &= (1 - x) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} (q^k x)^n \\ &= (1 - x) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \frac{q^k x}{1 - q^k x} \\ &= x + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-1)^k (1 - x) \cdot \frac{q^k x}{1 - q^k x}.\end{aligned}$$

On a ainsi exprimé $G(x)$ comme la somme du monôme x et de r fonctions développables en série entière sur $] -1/q, 1/q[$ au moins : on a donc trouvé l'expression de $G(x)$ *sur cet intervalle* (unicité du développement en série entière) bien que les calculs intermédiaires n'aient de sens que sur $[0, 1[$!

► Pour tout $0 < x < 1/q$, on a donc

$$G'(x) = 1 + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-1)^k \left[\frac{-q^k}{1 - q^k x} + \frac{(1 - x)q^k}{(1 - q^k x)^2} \right]$$

et en particulier

$$E(T) = G'(1) = 1 - \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \frac{(-q)^k}{1 - q^k}.$$

► On peut vérifier expérimentalement l'exactitude de cette expression.

Fonctions annexes

```
# coefficients binomiaux
from scipy.special import comb as C
# simulation d'une v.a. géométrique
from numpy.random import geometric as G
from numpy import linspace, array
```

Espérance théorique

```
def E_th(r, q):
    Eth = 1
    for k in range(1, r+1):
        Eth -= C(r, k) * (-q)**k / (1 - q**k)
    return Eth
```

Moyenne empirique calculée sur un échantillon

```
def Moy_emp(r, q, N=100000):
    p = 1-q
    ech = G(p, (r,N))
    ech_max = ech.max(axis=0)
    return ech_max.mean()
```

Erreur relative (en pourcentage)

```
def err_rel(r, q):
    th, emp = E_th(r,q), Moy_emp(r, q)
    err_relative = abs(th-emp)/th
    return 100*err_relative
```

Affichage des résultats

```
for q in linspace(0.1, 0.9, 8):
    print("q = {}".format(q))
    L_err = array([ err_rel(r, q) for r in range(2, 10) ])
    print(L_err.mean())
```

D'après la Loi des grands nombres, la valeur moyenne des T calculés sur un échantillon de N valeurs tend vers la valeur théorique $E(T)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Pour $N = 10^5$, on constate ici que l'erreur relative moyenne est de l'ordre de 0,1%, cela confirme que notre formule théorique est sans doute exacte.

Solution 42**Kh14-51**

1. D'après la formule du crible,

$$P(B \cap A) + P(B \cap C) - P((B \cap A) \cap (B \cap C)) = P((B \cap A) \cup (B \cap C)) = P(B \cap (A \cup C)) \leq 1,$$

donc

$$P(B \cap A) + P(B \cap C) \leq 1 + P((B \cap A) \cap (B \cap C)) \leq 1 + P(A \cap C)$$

puisque $(B \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \subset A \cap C$. On a ainsi démontré que

$$P(A \cap B) - P(A \cap C) \leq 1 - P(B \cap C).$$

✚ Nous allons démontrer de même que

$$P(A \cap C) - P(A \cap B) \leq 1 - P(B \cap C).$$

D'après la formule du crible,

$$P(C \cap A) + P(C \cap B) - P((C \cap A) \cap (C \cap B)) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = P(C \cap (A \cup B)) \leq 1,$$

donc

$$P(C \cap A) + P(C \cap B) \leq 1 + P((C \cap A) \cap (C \cap B)) \leq 1 + P(A \cap B)$$

puisque $(C \cap A) \cap (C \cap B) = A \cap B \cap C \subset A \cap B$.

2. On décompose $A \cap C^c$ dans le système complet d'évènements (B, B^c) :

$$P(A \cap C^c) = P((A \cap C^c) \cap B) + P((A \cap C^c) \cap B^c) \leq P(B \cap C^c) + P(A \cap B^c)$$

puisque $A \cap C^c \cap B \subset B \cap C^c$ et que $A \cap C^c \cap B^c \subset A \cap B^c$.

Solution 43**Kh14-52**

1.

✚ Pour justifier l'existence d'une telle variable aléatoire X , il faudrait commencer par vérifier que la famille $((k-1)2^{-k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est bien une loi de probabilité discrète (il ne s'agit pas d'une loi de référence).

Il est clair que c'est une famille de réels positifs. Il reste à vérifier que cette série converge et que sa somme est égale à 1.

Pour éviter de faire deux fois les mêmes calculs, nous allons calculer directement la fonction génératrice G_X et nous vérifierons alors que $G_X(1) = 1$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^k$ est égal à 1 (série de référence), donc le rayon de convergence de la série dérivée $\sum kx^{k-1}$ est aussi égal à 1 et comme

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \text{alors} \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad H'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

• La fonction génératrice est la somme de la série de terme général

$$\frac{k-1}{2^k} t^k = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot (k-1) \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{k-2}.$$

donc cette série converge absolument pour $|t/2| < 1$, c'est-à-dire pour $t \in]-2, 2[$ et

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \frac{t^k}{2^k} = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left(\frac{t}{2}\right)^{\ell-1} = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot H'\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\frac{t}{2-t}\right)^2.$$

• En particulier, on a bien $G_X(1) = 1$ — ouf!

2. Comme la série génératrice converge absolument pour $|t| < 2$, sa somme est en particulier dérivable en $t = 1$, ce qui prouve que X est une variable aléatoire d'espérance finie et donc que

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1).$$

Pour tout $t \in]-2, 2[$,

$$G_X(t) = \left(-1 + \frac{2}{2-t}\right)^2 \quad \text{donc} \quad G'_X(t) = 2 \cdot \frac{t}{2-t} \cdot \frac{2}{(2-t)^2}$$

et par conséquent $\mathbf{E}(X) = 4$.

• On a réécrit $G_X(t)$ à l'aide de l'astuce taupinale pour que le calcul de la dérivée soit plus facile.

On peut encore écrire $G_X(t)$ d'une autre manière pour en donner une interprétation intéressante :

$$G_X(t) = \left(\frac{(1/2) \cdot t}{1 - (1/2) \cdot t}\right)^2.$$

On reconnaît alors le carré de la fonction génératrice de la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. Comme la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice, on en déduit que la loi de X est aussi la loi de la somme $Y_1 + Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. Cela nous permet de vérifier le calcul de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y_1) + \mathbf{E}(Y_2) = 2 + 2 = 4.$$

Solution 44

Kh14-53

1. Comme X_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$, on sait que $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{V}(X_n) = n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$\left| \frac{X_n(\omega)}{n} - 1 \right| > \alpha \iff |X_n(\omega) - \mathbf{E}(X_n)| > n\alpha.$$

• On a ainsi démontré que

$$A_{n,\alpha} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left[\left| \frac{X_n}{n} - 1 \right| > \alpha \right] = [|X_n(\omega) - \mathbf{E}(X_n)| > n\alpha]$$

et en particulier que $A_{n,\alpha} \in \mathcal{A}$.

On doit savoir justifier cette dernière propriété même s'il n'est pas toujours nécessaire de donner tous les détails :

— Comme X_n est une variable aléatoire discrète, alors $Y_n = |X_n(\omega) - \mathbf{E}(X_n)|$ est aussi une variable aléatoire discrète (image d'une variable aléatoire discrète par une application quelconque).

— En notant E_n , l'ensemble (fini ou dénombrable) des valeurs possibles pour la variable aléatoire discrète Y_n , on sait que $[Y_n = x] \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in E_n$ et on en déduit que l'image réciproque

$$[Y_n > n\alpha] = \bigcup_{\substack{x \in E_n \\ x > n\alpha}} [Y_n = x]$$

appartient à la tribu $\mathcal{A}$ en tant qu'union finie ou dénombrable d'événements.

— Il est plus simple d'indiquer que $A_{n,\alpha}$ est l'image réciproque de l'intervalle $]n\alpha, +\infty[$ par la variable aléatoire Y_n .

On déduit donc de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - 1\right| > \alpha\right) = \mathbf{P}(|X_n(\omega) - \mathbf{E}(X_n)| > n\alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X_n)}{(n\alpha)^2} = \frac{1}{n\alpha^2}$$

et on conclut alors par encadrement.

✎ Tout évènement de la forme $|\cdot| > \alpha$ doit faire penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : il faut penser à calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire et il reste alors à réécrire l'évènement étudié pour faire apparaître l'expression du théorème.

2. L'application

$$\left[\omega \mapsto f\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right)\right]$$

de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète (image d'une variable aléatoire discrète par une application quelconque). Par hypothèse sur f , cette variable aléatoire est bornée, donc elle admet des moments de tout ordre et en particulier c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

Par linéarité et inégalité triangulaire,

$$\left|\mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right) - f(1)\right| = \left|\mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right) - f(1)\right)\right| \leq \mathbf{E}\left(\left|f\left(\frac{X_n}{n}\right) - f(1)\right|\right).$$

✎ Fixons un réel $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier continue en 1. Comme $\varepsilon > 0$, il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad |u - 1| \leq \alpha \implies |f(u) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Considérons maintenant le système complet d'évènements $(A_{n,\alpha}, A_{n,\alpha}^c)$.

— Si $\omega \in A_{n,\alpha}^c$, alors

$$\left|\frac{X_n(\omega)}{n} - 1\right| \leq \alpha, \quad \text{donc} \quad \left|f\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right) - f(1)\right| \leq \varepsilon.$$

— Si $\omega \in A_{n,\alpha}$, alors, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{X_n(\omega)}{n} - 1\right| > \alpha, \quad \text{donc} \quad \left|f\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right) - f(1)\right| \leq 2\|f\|_\infty$$

puisque la fonction f est supposée bornée.

On a ainsi démontré que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \left|f\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right) - f(1)\right| \leq \varepsilon \mathbb{1}_{A_{n,\alpha}^c}(\omega) + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{A_{n,\alpha}}(\omega).$$

Par positivité et linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{E}\left(\left|f\left(\frac{X_n}{n}\right) - f(1)\right|\right) \leq \mathbf{E}(\varepsilon \mathbb{1}_{A_{n,\alpha}^c} + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{A_{n,\alpha}}) = \varepsilon \mathbf{P}(A_{n,\alpha}^c) + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(A_{n,\alpha}).$$

✎ Pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$, l'indicatrice $\mathbb{1}_B$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(B)$, donc

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbf{P}(B).$$

✎ Toute probabilité est majorée par 1, donc

$$\left|\mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right) - f(1)\right| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(A_{n,\alpha}).$$

D'après la première question,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(A_{n,\alpha}) = 0,$$

donc il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(A_{n,\alpha}) \leq \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \left| \mathbf{E} \left(f \left(\frac{X_n}{n} \right) \right) - f(1) \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(f \left(\frac{X_n}{n} \right) \right) = f(1).$$

On aboutit au même résultat en considérant une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi qui admettent un moment d'ordre 2 et en posant

$$X_n = U_1 + \dots + U_n.$$

En effet, dans ce cas, $\mathbf{E}(X_n) = n\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(X_n) = n\mathbf{V}(U)$ et la démonstration précédente s'applique avec des modifications mineures.

Nous avons donc en fait démontré une conséquence de la Loi des grands nombres.

• Rappelons à cette occasion la propriété de **stabilité** de la loi de Poisson : si les variables aléatoires indépendantes U_k suivent toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, alors la somme $U_1 + \dots + U_n$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.

Solution 45

Kh14-54

1. Soient $1 \leq k \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$. Selon le signe de $X_k(\omega)$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \exp(t|X_k(\omega)|) = \exp(\pm tX_k(\omega)) \geq 0$$

donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \exp(t|X_k(\omega)|) \leq \exp(tX_k(\omega)) + \exp(-tX_k(\omega)).$$

Une somme de termes positifs est plus grande que chacun de ses termes et, en particulier, supérieur au plus grand des termes.

L'énoncé suppose implicitement que les variables aléatoires e^{tX_k} sont toutes des variables aléatoires d'espérance finie. On peut donc légitimement invoquer la linéarité de l'espérance sur toute combinaison linéaire de ces variables.

L'espérance conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}[\exp(t|X_k|)] \leq \mathbf{E}[\exp(tX_k) + \exp(-tX_k)] = \mathbf{E}[\exp(tX_k)] + \mathbf{E}[\exp(-tX_k)]$$

par linéarité de l'intégrale. On déduit alors de l'hypothèse faite pour tout t réel (= quel que soit le signe de t) que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[\exp(t|X_k|)] \leq 2\exp(t^2/2).$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ (qui dépend de ω !) tel que $M_n(\omega) = |X_k(\omega)|$ et donc tel que

$$\exp(tM_n(\omega)) = \exp(t|X_k(\omega)|).$$

Comme une somme de termes positifs est supérieure au plus grand de ses termes, on en déduit que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \exp(tM_n(\omega)) \leq \sum_{i=1}^n \exp(t|X_i(\omega)|).$$

L'espérance conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}[\exp(tM_n)] \leq \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^n \exp(t|X_i|) \right]$$

et donc, par linéarité de l'espérance,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[\exp(tM_n)] \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\exp(t|X_k|)] \leq 2n\exp(t^2/2).$$

3. Pour $t > 0$, la fonction $[x \mapsto e^{tx}]$ est strictement croissante, donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_n(\omega) \geq s \iff \exp[tM_n(\omega)] \geq e^{st}$$

donc

$$\forall s > 0, \quad [M_n \geq s] = [\exp(tM_n) \geq e^{st}].$$

✎ Si on compose une inégalité par une fonction monotone qui n'est pas strictement monotone, on n'obtient qu'une inclusion entre les événements (et non pas l'égalité).

Comme e^{tM_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie (d'après la question précédente), on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}(M_n \geq s) = \mathbf{P}(\exp(tM_n) \geq e^{st}) \leq \frac{\mathbf{E}[\exp(tM_n)]}{e^{st}}$$

et, d'après la question précédente,

$$\forall s, t > 0, \quad \mathbf{P}(M_n \geq s) \leq 2n \exp(t^2/2 - st).$$

Comme le minorant (= le membre de gauche) ne dépend pas de t , on peut passer à la borne inférieure en fonction de $t > 0$.

✎ Pour tout $s > 0$, la fonction $[t \mapsto t^2/2 - st]$ est polynomiale de degré 2 et admet $t = 0$ et $t = 2s$ pour racines réelles. Elle atteint donc son extremum en $t = s$ et comme cet extremum est un minimum,

$$\min_{t > 0} \left(\frac{t^2}{2} - st \right) = \frac{-s^2}{2}.$$

✎ Si le discriminant de $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ est strictement positif, alors l'extremum de la fonction polynomiale est atteint au milieu des deux racines réelles, c'est-à-dire en $-b/2a$; si $a > 0$, cet extremum est un minimum et si $a < 0$, cet extremum est un maximum.

Par conséquent,

$$\forall s > 0, \quad \mathbf{P}(M_n \geq s) \leq 2n \exp(-s^2/2).$$

✎ Comme M_n est une variable aléatoire positive, alors $\mathbf{P}(M_n \leq e^{M_n}) = 1$ et comme e^{M_n} est une variable aléatoire d'espérance finie (cas $t = 1$!), on déduit du Théorème de comparaison que M_n est une variable aléatoire d'espérance finie.

En admettant que, dans ces conditions,

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(M_n \geq s) \, ds,$$

on déduit de ce qui précède que

$$\mathbf{E}(M_n) \leq \sqrt{2\pi n}.$$

Mais cette majoration est vraiment grossière !

4. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto e^{tx}]$ est convexe. On a déjà justifié que M_n et e^{tM_n} étaient des variables aléatoires d'espérance finie, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t \mathbf{E}(M_n)) \leq \mathbf{E}(e^{tM_n}) \leq 2n \exp(t^2/2).$$

✎ Si $t < 0$, alors le premier terme de cet encadrement est inférieur à 1 (on rappelle que M_n est une variable aléatoire positive) alors que le troisième terme est supérieur à $2n$: dans ce cas, cet encadrement ne présente aucun intérêt.

En composant par $\ln$ (fonction croissante) et en divisant par $t > 0$, on en déduit que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{E}(M_n) \leq \frac{t}{2} + \frac{\ln 2n}{t}.$$

En étudiant les variations du second membre en fonction de t , on trouve que son minimum est atteint en $t_0 = \sqrt{2 \ln 2n}$ et que ce minimum est égal à t_0 . On a ainsi démontré que

$$\mathbf{E}(M_n) \leq \sqrt{2 \ln 2n}.$$

✎ On a ainsi obtenu une majoration de $\mathbf{E}(M_n)$ bien plus précise que la majoration précédente !

Solution 46**Kh14-55**

Si $i = 0$, alors la variable aléatoire X^i est constante, égale à 1, et donc

$$\forall 1 \leq j < n, \quad \mathbf{E}(X^i Y^j) = \mathbf{E}(Y^j) = 1 \times \mathbf{E}(Y^j) = \mathbf{E}(X^i) \mathbf{E}(Y^j).$$

Il en va de même si $j = 0$, donc en fait on suppose que

$$\forall 0 \leq i < m, \forall 0 \leq j < n, \quad \mathbf{E}(X^i Y^j) = \mathbf{E}(X^i) \mathbf{E}(Y^j).$$

✎ D'après la formule de Koenig-Huyghens, on suppose que les variables aléatoires X^i et Y^j sont décorréliées :

$$\forall 0 \leq i < m, \forall 0 \leq j < n, \quad \mathbf{Cov}(X^i, Y^j) = 0.$$

✎ Considérons deux polynômes $P \in \mathbb{R}_{m-1}[Z]$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[Z]$:

$$P = \sum_{i=0}^{m-1} a_i Z^i, \quad Q = \sum_{j=0}^{n-1} b_j Z^j.$$

✎ Comme X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, toute fonction de X ou de Y est encore une variable aléatoire discrète.

Les deux variables aléatoires $P(X)$ et $Q(Y)$ sont de carré intégrable (elles ne prennent qu'un nombre *fini* de valeurs, donc elles sont bornées et par conséquent, elles admettent un moment d'ordre deux) et leur covariance est nulle.

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(P(X), Q(Y)) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i b_j \mathbf{Cov}(X^i, Y^j) && \text{(bilinéarité de Cov)} \\ &= 0 && \text{(décorrélation de } X^i \text{ et de } Y^j) \end{aligned}$$

✎ Considérons une application $f : \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$. D'après la Théorie de l'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_{m-1}[Z]$ tel que

$$\forall 1 \leq k \leq m, \quad f(x_k) = P_f(x_k).$$

De même, pour toute application $g : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un polynôme $Q_g \in \mathbb{R}_{n-1}[Z]$ tel que

$$\forall 1 \leq \ell \leq n, \quad g(y_\ell) = Q_g(y_\ell).$$

✎ On suppose bien entendu que les x_k sont deux à deux distincts et que, de même, les y_ℓ sont deux à deux distincts. La théorie de Lagrange nous assure de l'unicité des polynômes P_f et Q_g , mais c'est sans intérêt ici.

✎ Considérons deux entiers $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq \ell \leq n$. Il existe deux polynômes $P_k \in \mathbb{R}_{m-1}[Z]$ et $Q_\ell \in \mathbb{R}_{n-1}[Z]$ tels que

$$\forall 1 \leq i \leq m, \quad P_k(x_i) = \delta_{i,k} \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad Q_\ell(y_j) = \delta_{j,\ell}.$$

✎ On applique ce qui précède aux deux fonctions indicatrices :

$$f = \mathbb{1}_{\{x_k\}} : \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g = \mathbb{1}_{\{y_\ell\}} : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Les deux variables aléatoires $P_k(X)$ et $Q_\ell(Y)$ ne prennent que les valeurs 0 et 1, ce sont donc des variables de Bernoulli.

Plus précisément,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad P_k(X(\omega)) = 1 \iff X(\omega) = x_k$$

c'est-à-dire

$$[P_k(X) = 1] = [X = x_k].$$

De même,

$$[Q_\ell(Y) = 1] = [Y = y_\ell].$$

On a ainsi démontré que

$$P_k(X) = \mathbb{1}_{[X=x_k]} \quad \text{et que} \quad Q_\ell(Y) = \mathbb{1}_{[Y=y_\ell]}.$$

Par conséquent,

$$P_k(X)Q_\ell(Y) = \mathbb{1}_{[X=x_k] \cap [Y=y_\ell]}.$$

Le produit de l'indicatrice de $A \in \mathcal{A}$ par l'indicatrice de $B \in \mathcal{A}$ est encore une indicatrice, c'est l'indicatrice de $A \cap B \in \mathcal{A}$.

On a démontré plus haut que les variables aléatoires $P_k(X)$ et $Q_\ell(Y)$ étaient décorréliées, donc

$$\mathbf{E}[P_k(X)Q_\ell(Y)] = \mathbf{E}[P_k(X)] \mathbf{E}[Q_\ell(Y)]$$

c'est-à-dire (puisqu'il s'agit de variables aléatoires de Bernoulli)

$$\mathbf{P}([X = x_k] \cap [Y = y_\ell]) = \mathbf{P}(X = x_k) \mathbf{P}(Y = y_\ell).$$

Cela vaut pour tout $1 \leq k \leq m$ et tout $1 \leq \ell \leq n$, donc cela prouve que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Solution 47

Kh14-56

En tant que fonction de X , variable aléatoire discrète, Y est aussi une variable aléatoire discrète.

Les valeurs

Pour $0 \leq X(\omega) \leq n$, on a $n \leq 2n - X(\omega) \leq 2n$, donc

$$Y(\omega) = X(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

et pour $n+1 \leq X(\omega) \leq 2n$, on a $0 \leq 2n - X(\omega) \leq n$, donc

$$Y(\omega) = 2n - X(\omega) \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

donc Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Les fréquences

D'après la discussion précédente, pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$Y(\omega) = k \iff \begin{cases} X(\omega) = k \\ 2n - X(\omega) = k \end{cases}$$

donc

$$[Y = k] = [X = k] \cup [X = 2n - k].$$

Par conséquent

$$\forall 0 \leq k < n, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k) + \mathbf{P}(X = 2n - k) = 2 \cdot \binom{2n}{k} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

et, cas particulier!,

$$\mathbf{P}(Y = n) = \mathbf{P}(X = n) = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

Espérance

On applique la formule, avec les astuces classiques sur les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2k \cdot \binom{2n}{k} \cdot \frac{1}{4^n} + n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{2}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k)!} + \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n} \\ &= \frac{2 \times 2n}{4^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{k-1} + \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n} \\ &= \frac{n}{4^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} - \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n}. \end{aligned}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2n-1-k} = \sum_{\ell=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{\ell}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \frac{2^{2n-1}}{2} = 4^{n-1}.$$

Ainsi

$$\mathbf{E}(Y) = n - \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{4^n}.$$

On déduit de la formule de Stirling que

$$\mathbf{E}(Y) = n - \sqrt{\frac{n}{\pi}} + o(\sqrt{n})$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution 48

rms128-722

1. Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série (de terme général positif) $\sum k \mathbf{P}(X = k)$ est (absolument) convergente.

En particulier, comme pour toute série convergente, la suite des restes converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell \mathbf{P}(X = \ell) = 0. \quad (*)$$

• Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on décompose l'évènement $[X > k]$ dans le système complet d'évènements associé à X :

$$[X > k] = \bigcup_{\ell=k+1}^{+\infty} [X = \ell].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=k+1}^n \mathbf{P}(X = \ell) + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbf{P}(X = \ell) + (n+1) \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \ell \mathbf{P}(X = \ell) + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1) \mathbf{P}(X = \ell). \end{aligned}$$

• Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) - \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \mathbf{P}(X = \ell) - \sum_{\ell=1}^n \ell \mathbf{P}(X = \ell) - \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1) \mathbf{P}(X = \ell) \\ &= \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell \mathbf{P}(X = \ell) - \underbrace{\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1) \mathbf{P}(X = \ell)}_{\geq 0} \\ &= \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \underbrace{[\ell - (n+1)]}_{\geq 0} \mathbf{P}(X = \ell) \end{aligned}$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \mathbf{E}(X) - \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) \leq \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \ell \mathbf{P}(X = \ell).$$

• On peut alors déduire de (*) et du théorème d'encadrement que la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente et que

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

🔍 Cette analyse est assez fine, puisqu'on a démontré au passage que

$$\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} (n+1) \mathbf{P}(X = \ell) = (n+1) \mathbf{P}(X \geq n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

alors que la célèbre inégalité de Markov nous assure seulement (sous la même hypothèse d'intégrabilité de X) que

$$\mathbf{P}(X \geq n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1/n).$$

🔍 Au passage, la réciproque est vraie (elle se déduit facilement des calculs qui précèdent) et ces deux propriétés font partie du cours.

2. a. Commençons par mettre les choses au net!

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et des variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$ définies sur cet espace, indépendantes (tirages successifs avec remise) et suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$.

On étudie ici

$$X_N = \max\{U_1, \dots, U_n\},$$

qui est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

🔍 Toute fonction d'une famille finie de variables aléatoires discrètes est encore une variable aléatoire discrète.

🔍 Comme X_N ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

🔍 Toute variable aléatoire presque sûrement bornée admet des moments de tout ordre.

🔍 Il est clair que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_N(\omega) \leq k \iff \forall 1 \leq i \leq n, \quad U_i(\omega) \leq k.$$

Autrement dit,

$$[X_N \leq k] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [U_i \leq k] \in \mathcal{A}$$

et comme les variables aléatoires U_i sont supposées indépendantes et de loi uniforme,

$$\forall 1 \leq k < N, \quad \mathbf{P}(X_n > k) = 1 - \mathbf{P}(X \leq k) = 1 - \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbf{P}(U_i \leq k) = 1 - (k/N)^n.$$

🔍 Pour $k \geq N$, les événements $[U_i \leq k]$ sont certains et $[X_n > k]$ est impossible : $\mathbf{P}(X_n > k) = 0$.

🔍 On déduit alors de la question précédente que

$$\mathbf{E}(X_N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_N > k) = \sum_{k=0}^{N-1} [1 - (k/N)^n].$$

2. b. On reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{1}{N} \mathbf{E}(X_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [1 - (k/N)^n] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 1 - x^n dx$$

puisque la fonction $[x \mapsto 1 - x^n]$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

On en déduit enfin que

$$\mathbf{E}(X_N) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \cdot N.$$

Solution 49

rms128-723

Commençons par mettre cet énoncé d'aplomb...

Il s'agit de vider une urne en retirant une à une les boules qu'elle contient initialement. Autrement dit, le résultat d'une "expérience" est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: pour tout entier $1 \leq k \leq n$, l'entier $\sigma(k)$ désigne le numéro de la k -ième boule tirée.

• Nous allons donc considérer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire U définie sur cet espace, qui suit la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

• Les applications $X_k : \Omega \rightarrow [1, n]$ qui décrivent les résultats des tirages successifs sont des fonctions de U , ce sont donc des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall \omega \in \Omega, \quad X_k(\omega) = U(\omega)(k) = \pi_k(U(\omega))$$

où $\pi_k : \mathfrak{S}_n \rightarrow [1, n]$ est l'évaluation $[\sigma \mapsto \sigma(k)]$.

• Les applications T_k sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ pour les mêmes raisons : l'application

$$T_k = \mathbb{1}_{[X_k > X_1, \dots, X_k > X_{k-1}]} = \mathbb{1}_{[X_k > X_1]} \cap \dots \cap [X_k > X_{k-1}]$$

est une variable aléatoire de Bernoulli en tant qu'indicatrice d'un évènement :

$$[X_k > X_1] \cap \dots \cap [X_k > X_{k-1}] \in \mathcal{A}$$

(puisque les $X_1, \dots, X_k$ sont des variables aléatoires et qu'une tribu est stable par intersection).

• Enfin, le nombre S_n de records est aussi une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en tant que somme de variables aléatoires :

$$S_n = T_1 + \dots + T_n.$$

1. On a démontré que S_n était une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, donc $[S_n = 1]$ et $[S_n = n]$ sont bien des évènements.

• Par convention, il y a un record au premier tirage. Par conséquent, s'il n'y a qu'un seul record au cours de l'expérience (ce que signifie $[S_n = 1]$), c'est qu'on a commencé par tirer la boule n et

$$[S_n = 1] = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \\ \sigma(1) = n}} [U = \sigma].$$

Comme U suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ (= un ensemble fini de cardinal $n!$), on en déduit que

$$\mathbf{P}(S_n = 1) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(1) = n\}}{n!} = \frac{1}{n}.$$

• Les permutations σ telles que $\sigma(1) = n$ correspondent aux bijections de $[2, n]$ sur $[1, n-1]$. Il y en a donc autant que de permutations dans $\mathfrak{S}_{n-1}$, c'est-à-dire $(n-1)!$.

• Il y a n records en tirages si, et seulement si, chaque tirage amène une boule d'un numéro supérieur aux numéros précédents, c'est-à-dire si on vide l'urne en tirant les boules par ordre croissant de numéros :

$$[S_n = n] = \bigsqcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)}} [U = \sigma] = [U = \mathbf{I}]$$

donc

$$\mathbf{P}(S_n = n) = \frac{1}{n!}.$$

2. a. On a démontré que les T_k étaient bien des variables aléatoires et comme ce sont des indicatrices, ce sont des variables aléatoires de Bernoulli. Leur loi est caractérisée par leur paramètre, égal à $\mathbf{P}(T_k = 1)$.

• Par convention, il y a un record lors du premier tirage, donc $\mathbf{P}(T_1 = 1) = 1$.

• On analyse l'évènement $[T_k = 1]$ comme les précédents. Pour $2 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} [T_k = 1] &= [X_k > X_1, \dots, X_k > X_{k-1}] \\ &= \bigsqcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \\ \sigma(1) < \sigma(k), \dots, \sigma(k-1) < \sigma(k)}} [U = \sigma] \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{P}(T_k = 1) = \frac{\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(1) < \sigma(k), \dots, \sigma(k-1) < \sigma(k)\}}{n!}.$$

Pour dénombrer cette partie de $\mathfrak{S}_n$, nous allons discuter sur les valeurs possibles de $\sigma(k)$: cet entier est compris entre k et n .

• Si $\sigma(k) = \ell$, on doit choisir les valeurs de $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$ dans $\llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$ (donc $\binom{\ell-1}{k-1}$ choix possibles), leur assigner un ordre (donc $(k-1)!$ permutations possibles) et enfin assigner un ordre aux $(n-k)$ valeurs restantes (donc $(n-k)!$ permutations possibles).

Ainsi,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(T_k = 1) = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=k}^n \binom{\ell-1}{k-1} (k-1)! (n-k)! = \frac{1}{k \binom{n}{k}} \sum_{\ell=k}^n \binom{\ell-1}{k-1} = \frac{1}{k}$$

d'après la formule généralisée du triangle de Pascal.

▮ Profitons de l'occasion pour un rappel utile.

Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie de cardinal k dans un ensemble de cardinal n .

Considérons qu'on choisisse k entiers dans l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le plus grand entier choisi, que nous noterons ℓ , est donc compris entre k (au cas où on choisirait les entiers $1, 2, \dots, k$) et n .

Ce plus grand entier étant choisi, il reste à choisir $(k-1)$ entiers dans l'intervalle restant $\llbracket 1, \ell \rrbracket = \llbracket 1, \ell-1 \rrbracket$ et il y a $\binom{\ell-1}{k-1}$ choix pour cela.

Ainsi

$$\binom{n}{k} = \sum_{\ell=k}^n \binom{\ell-1}{k-1}.$$

▮ On a remarqué en commençant que

$$\mathbf{P}(S_n = n) = \frac{1}{n!}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(T_1 = 1, T_2 = 1, \dots, T_n = 1) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(T_k = 1).$$

Cela ne prouve pas que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ soient indépendantes !

2. b. La variable aléatoire S_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc son espérance est bien définie. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = \mathbf{E}(T_1 + \dots + T_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(T_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Solution 50

rms128-725

1. Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

Comme les $a_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes d'espérance finie et que les couples $(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))$ sont deux à deux distincts, chaque produit

$$a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$$

est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(a_{k, \sigma(k)}).$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\det A$ est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(\det A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbf{E}(a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(a_{k, \sigma(k)}) = \det(\mathbf{E}(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

2. Si les $a_{i,j}$ suivent toutes la même loi, elles ont en particulier la même espérance, que nous noterons m . En appliquant ce qui précède à la matrice $B = \mathbf{x}I_n - A$,

$$\mathbf{E}[\chi_A(x)] = \det(\mathbf{E}(b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

où $b_{i,j} = -a_{i,j}$ pour $i \neq j$ et $b_{i,i} = x - a_{i,i}$. Par conséquent,

$$(\mathbf{E}(b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} = xI_n - mJ_n$$

où $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

• Le rang de J_n est égal à 1, donc 0 est une valeur propre de J_n dont la multiplicité est au moins égale à $(n-1)$. La matrice J_n est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et sa trace, égale à n , est égale à la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité).

Ainsi, les valeurs propres de mJ_n sont 0 (de multiplicité exactement $(n-1)$) et nm (valeur propre simple), donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[\chi_A(x)] = \det(xI_n - mJ_n) = x^{n-1}(x - nm).$$

Solution 51

rms128-726

Fixons $\omega \in \Omega$.

• Pour calculer les solutions de (E_ω) , il faut connaître les solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + (A(\omega) - 1)\lambda + B(\omega) = 0.$$

• Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est strictement positif, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 , dont le produit est égal à $B(\omega)$ et donc strictement positif.

• Comme B suit une loi géométrique, toutes les valeurs de B sont supérieures à 1.

Les deux racines sont donc de même signe et ce signe est celui de leur somme, c'est-à-dire le signe de $1 - A(\omega) < 0$.

• Même remarque sur A ! Et comme le discriminant est ici supposé strictement positif, $A(\omega)$ ne peut être égal à 1.

Comme les racines λ_1 et λ_2 sont strictement négatives et que la solution générale de (E_ω) est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t},$$

toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$.

• Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est nul, alors l'équation caractéristique possède une racine double $\lambda = \frac{1-A(\omega)}{2} \leq 0$.

Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$$

et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (puisque $\lambda < 0$).

Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est une fonction affine :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha + \beta t$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

• Si le discriminant $[A(\omega) - 1]^2 - 4B$ est strictement négatif, alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $\lambda \pm i\mu$.

La somme des racines est connue : $2\lambda = 1 - A(\omega) \leq 0$ et nous retrouvons la même discussion.

Si $A(\omega) > 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha e^{\lambda t} \cos(\mu t + \varphi)$$

et comme $\lambda < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Si $A(\omega) = 1$, alors la solution générale est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha \cos(\mu t + \varphi)$$

et seule la solution identiquement nulle tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

• En conclusion, toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $A(\omega) > 1$.

• Comme A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, la probabilité pour que toutes les solutions de (E_ω) tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$ est égale à

$$\mathbf{P}(A > 1) = 1 - \mathbf{P}(A = 1) = 1 - p.$$

Solution 52**rms128-728**

Une fois de plus, il faut commencer par poser le cadre des calculs probabilistes.

• On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille de variables aléatoires $(U, X_1, \dots, X_n)$ définies sur cet espace.

• On suppose que la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[[0, p]]$: cette variable modélise le choix de l'urne.

• On suppose ensuite que, pour tout entier $0 \leq i \leq p$, sous la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=i]}$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$\forall (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{0; 1\}^n, \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = \varepsilon_k)$$

et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(i/p)$ (hypothèse d'équiprobabilité) :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = 1) = \frac{i}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{[U=i]}(X_k = 0) = 1 - \frac{i}{p}.$$

• L'application $N_p = X_1 + \dots + X_n$ est donc une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (en tant que somme des variables aléatoires discrètes).

1. Par hypothèse, pour la mesure conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=i]}$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(i/p)$. Par conséquent, leur somme N_p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, i/p)$.

2. La variable aléatoire N_p prend des valeurs comprises entre 0 et n , donc c'est une variable d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(N_p) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(N_p = k).$$

Le système complet d'événements associé à la variable aléatoire U nous permet d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(N_p = k) = \sum_{i=0}^p \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k) \mathbf{P}(U = i) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_p) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{p+1} \sum_{i=0}^p \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}_{[U=i]}(N_p = k) && \text{(permutation des sommes)} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p n \cdot \frac{i}{p} && \text{(espérance de la loi } \mathcal{B}(n, i/p)) \\ &= \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

✎ Sur l'ensemble des urnes, il y a autant de boules noires que de boules blanches et comme on choisit l'urne "au hasard", on n'est pas très étonné que le nombre moyen de boules blanches tirées au cours de n tirages soit $n/2$.

Solution 53**rms128-729**

1. Il est clair que les variables aléatoires X_k sont centrées. Par linéarité de l'espérance, la variable aléatoire S_n est centrée elle aussi.

Comme elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire S_n est aussi une variable aléatoire de variance finie.

✎ Une variable aléatoire presque sûrement bornée admet des moments de tout ordre.

Comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = n \mathbf{V}(X_1).$$

Comme X_1 est centrée (formule de Koenig-Huyghens),

$$\mathbf{V}(S_n) = n \mathbf{E}(X_1^2) = n$$

et donc $\mathbf{V}(S_n/n) = 1/n$.

On déduit alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

2. Comme les variables aléatoires X_k ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, les variables aléatoires e^{tX_k} sont des variables aléatoires d'espérance finie.

✎ *L'image d'une variable aléatoire discrète par une fonction quelconque est toujours une variable aléatoire discrète.*

Comme les X_k sont indépendantes, les e^{tX_k} sont indépendantes (lemme des coalitions) et on sait qu'un produit de variables aléatoires d'espérance finie indépendantes est encore une variable aléatoire d'espérance finie. De plus, comme les X_k sont des variables aléatoires de même loi,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(e^{tX_k}) = [\mathbf{E}(e^{tX_1})]^n = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$$

(formule de transfert). On a ainsi démontré que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tS_n}) = \text{ch}^n t.$$

3. On connaît les développements en série entière de $\exp$ et de ch : quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch } t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \dots \quad \exp \frac{t^2}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \dots$$

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$(2n)! = n! \times (n+1)(n+2) \cdots (n+n) \geq n! \cdot 3^n > 2^n \cdot n! > 0.$$

Par conséquent,

$$\forall t > 0, \quad \text{ch } t \leq e^{t^2/2}.$$

4. Comme $t > 0$, la fonction $[x \mapsto e^{tx}]$ est strictement croissante, donc

$$\left[\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right] = [e^{tS_n} \geq e^{nt\varepsilon}]$$

et on déduit de l'inégalité de Markov que

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E}[e^{tS_n}]}{e^{nt\varepsilon}} \leq e^{nt^2/2} \cdot e^{-nt\varepsilon}.$$

5. On a établi l'inégalité précédente pour tout $t > 0$ alors que le membre de gauche est indépendant du paramètre t . On peut donc passer à la borne inférieure.

✎ *C'est tout l'intérêt de la méthode employée ! On introduit un paramètre pour obtenir une majoration plus fine que ce qu'on aurait obtenu en appliquant directement l'inégalité de Markov — alors qu'en fait, on ne fait qu'appliquer l'inégalité de Markov !*

L'expression $\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ est minimale pour $t = \varepsilon$ et donc minorée par $-\varepsilon^2/2$.

✎ *L'expression $at^2 + bt + c$ polynomiale de degré 2 (soit $a \neq 0$) atteint un extremum global en $t = -\frac{b}{2a}$.*

La nature de cet extremum dépend du signe de a : c'est un maximum pour $a < 0$ et un minimum pour $a > 0$.

On a ainsi démontré l'inégalité de Chernoff :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Solution 54

rms130-624

Soit $E \subset \mathbb{R}$, le **support** de la loi de X , c'est-à-dire l'ensemble (fini ou dénombrable, puisque E est une variable aléatoire discrète) des réels x pour lesquels

$$P(X = x) > 0.$$

▮ *Le support de la loi de X est l'ensemble des valeurs qui sont vraiment prises par la variable X . On peut considérer une variable de loi géométrique comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ mais son support est $\mathbb{N}^*$. De même, on peut considérer une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ mais son support est $[[0, n]]$.*

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

et par conséquent

$$\forall x \in E, \quad X(\omega) = x \implies Y(\omega) = f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad [X = x] \subset [Y = f(x)]$$

et donc

$$\forall x \in E, \quad [X = x] \cap [Y = f(x)] = [X = x].$$

• On en déduit que

$$\forall x \in E, \quad P(X = x, Y = f(x)) = P(X = x)$$

et par hypothèse d'indépendance

$$\forall x \in E, \quad P(X = x) P(Y = f(x)) = P(X = x).$$

Or $P(X = x) > 0$ pour tout $x \in E$ (par définition même du support), donc

$$\forall x \in E, \quad P(Y = f(x)) = 1.$$

▮ *Si x n'est pas dans le support de la loi de X , alors on ne peut pas simplifier par $P(X = x)$ (division par zéro).*

• Cette propriété signifie deux choses :

- la variable aléatoire Y n'est ni variable, ni aléatoire : elle est presque sûrement constante (loi de Dirac);
- la fonction f prend la même valeur (= la valeur de Y) en chaque point du support de la loi de X .

▮ *Cette conclusion n'est pas extraordinaire car l'hypothèse de départ était paradoxale : il est tout de même étonnant de supposer que X et Y soient indépendantes alors que $Y = f(X)$ est déterminée par X .*

Solution 55

rms130-630

1.

▮ *On cherche ici à estimer le nombre de valeurs distinctes d'un échantillon. La démarche qui suit est "classique" en calcul des probabilités, mais elle me semble assez ardue à justifier dans le cadre du programme.*

On notera qu'on ne fait aucune hypothèse sur la loi de l'échantillon — il n'est par exemple pas utile de supposer que les X_k sont indépendantes.

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors, Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_k(\omega) = \mathbb{1}_{[k \in \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}]}.$$

Les Y_k sont des applications de Ω dans $\{0, 1\}$ et

$$[Y_k = 1] = \bigcup_{i=1}^n [X_i = k] \in \mathcal{A},$$

donc les Y_k sont bien des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

▮ *Que les variables aléatoires X_k soient, ou non, indépendantes, les variables Y_k n'ont à peu près aucune chance d'être indépendantes.*

• La variable aléatoire Y_k prend la valeur 1 si, et seulement si, l'entier k est une valeur prise par l'une (au moins) des variables aléatoires de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

Le nombre R_n de valeurs distinctes prises par l'échantillon est donc la somme de ces variables aléatoires de Bernoulli.

$$\forall \omega \in \Omega, \quad R_n(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} Y_k(\omega).$$

▮ Comme l'échantillon compte n variables, il y a au plus n valeurs prises pour chaque ω et il est donc clair que cette série de variables aléatoires converge simplement sur Ω .

• On peut en déduire que R_n est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note E_r , l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le cardinal est égal à r . Puisqu'il existe une surjection canonique de $\mathbb{N}^r$ sur E_r et que $\mathbb{N}^r$ est dénombrable, l'ensemble E_r est dénombrable et comme les Y_k sont des variables aléatoires, alors

$$[R = r] = \bigsqcup_{\{k_1, \dots, k_r\} \in E_r} \left[\left(\bigcap_{i=1}^r [Y_{k_i} = 1] \right) \cap \left(\bigcap_{k \notin \{k_1, \dots, k_r\}} [Y_k = 0] \right) \right] \in \mathcal{A},$$

▮ Si on pense en termes de **fonction de répartition**, il y a une manière plus simple de vérifier que R_n est une variable aléatoire. En effet,

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad [R \leq r] = \bigcup_{F \in E_r} \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X_k \in F] \in \mathcal{A}.$$

Comme $[R = 1] = [R \leq 1]$ et que $[R = r] = [R \leq r] \cap [R \leq r-1]^c$ pour tout $r \geq 2$, on en déduit que $[R = r] \in \mathcal{A}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}(Y_k) = \mathbf{P}(k \in \{X_1, \dots, X_n\})$$

(espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli) et comme

$$[k \in \{X_1, \dots, X_n\}] = \bigcup_{i=1}^n [X_i = k],$$

alors

$$\mathbf{E}(Y_k) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = k) = n \mathbf{P}(X_1 = k)$$

puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ont toutes même loi.

La famille $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc la série $\sum \mathbf{P}(X_1 = k)$ converge (propriété de σ -additivité). Par comparaison de série de terme général positif, la série $\sum \mathbf{E}(Y_k)$ est donc convergente.

• On sait que $1 \leq R_n(\omega) \leq n$ pour tout $\omega \in \Omega$. En tant que variable aléatoire bornée, R_n est une variable aléatoire d'espérance finie. On **admet** que

$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(k \in \{X_1, \dots, X_n\}).$$

▮ Le Théorème de convergence croissante nous assure que : si une série de variables aléatoires positives converge presque sûrement sur Ω , alors l'espérance de la somme est égale à la somme des espérances (que cette espérance soit, ou non, finie).

D'après la relation de Chasles, pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{a-1} \mathbf{E}(Y_k) + \sum_{k=a}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_k) \leq \sum_{k=0}^{a-1} 1 + \sum_{k=a}^{+\infty} n \mathbf{P}(X_1 = k) = a + n \mathbf{P}(X_1 \geq a).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq a) = 0$$

par continuité décroissante, il existe $a_0 > 0$ tel que

$$0 \leq \mathbf{P}(X_1 \geq a) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme a_0/n tend vers 0, il existe aussi un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{a_0}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la première question,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{\mathbf{E}(R_n)}{n} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

🔗 Cette démonstration est dans le cours : c'est ainsi qu'on démontre que le théorème de sommation des relations de comparaison avec o .

3. Si X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum n \mathbf{P}(X = n)$ est convergente. En particulier, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \geq N \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = N \mathbf{P}(X \geq N) \geq 0$$

et comme le reste d'une série convergente tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X \geq N) = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

♣ Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall a > 0, \quad 0 \leq \mathbf{E}(R_n) \leq a + \frac{n\varepsilon}{a}.$$

En étudiant les variations de

$$\left[a \mapsto a + \frac{n\varepsilon}{a} \right]$$

sur $]0, +\infty[$, on constate que le minimum est atteint pour $a = \sqrt{n\varepsilon}$ et que ce minimum est égal à $2\sqrt{n\varepsilon}$. On en déduit donc que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \mathbf{E}(R_n) \leq 2\sqrt{n\varepsilon}$$

et donc que $\mathbf{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

🔗 Cette démonstration est classique : elle permet de déduire l'inégalité de Chernoff de l'inégalité de Markov.

Solution 56

rms130-982

1. Pour tout $s > 1$, il est clair que la famille de terme général

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$$

est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1.

Par conséquent, il existe bien une variable aléatoire discrète

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{N}^*$$

telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

🔗 La question n'est pas posée, mais il faut savoir y répondre !

♣ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier n divise l'entier $X(\omega)$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$X(\omega) = k.n$$

donc

$$[n \text{ divise } X] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = kn].$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, chaque $[X = kn]$ est un événement et, par union dénombrable,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = [n \text{ divise } X] \in \mathcal{A}.$$

Par σ -additivité (puisque les événements qui composent A_n sont deux à deux disjoints),

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = kn) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(kn)^s} = \frac{1}{n^s} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}.$$

2. D'après le Théorème de Gauss, si $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers deux à deux premiers entre eux qui divisent l'entier $X(\omega)$, alors le produit $n_1 \cdots n_r$ divise $X(\omega)$.

La réciproque est évidente : si $n_1 \cdots n_r$ divise $X(\omega)$, alors $n_1, \dots, n_r$ divisent $X(\omega)$. Donc

$$\bigcap_{k=1}^r A_{n_k} = A_{n_1 \cdots n_r}$$

et, d'après la loi de X ,

$$P(A_{n_1 \cdots n_r}) = \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^s} = \prod_{k=1}^r \frac{1}{n_k^s}.$$

Par conséquent,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^r A_{n_k}\right) = \prod_{k=1}^r P(A_{n_k}).$$

▮ Par définition, des événements $B_1, \dots, B_r$ sont (mutuellement) indépendants lorsque

$$P(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_d}) = \prod_{k=1}^d P(B_{i_k})$$

quel que soit l'entier $2 \leq d \leq r$, quels que soient les indices

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq r.$$

Rien que d'écrire cette définition, on frémit !

Si les entiers $n_1, \dots, n_r$ sont deux à deux premiers entre eux, il en va évidemment de même pour les entiers $n_{i_1}, \dots, n_{i_d}$, quel que soit l'entier $2 \leq d \leq r$, quels que soient les indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq r$ et par conséquent

$$P\left(\bigcap_{k=1}^d A_{n_{i_k}}\right) = \prod_{k=1}^d P(A_{n_{i_k}}).$$

On a donc bien démontré que les événements

$$A_{n_1}, \dots, A_{n_r}$$

étaient (mutuellement) indépendants.

Solution 57

rms130-984

1. On remarque que $P(1) = -2 < 0$ et $P(2) = 1 > 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $1 < \alpha < 2$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Les racines de $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ sont 1 et $-1/3$ et $P'(x)$, expression polynomiale du second degré, est négatif entre ses racines. Donc P est croissante sur $]-\infty, -1/3]$, décroissante sur $[-1/3, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

Comme

$$P(-1/3) = \frac{-1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 < 0,$$

on peut déduire du tableau de variations de P que P admet une racine réelle unique.

Puisque P est un polynôme de degré trois à coefficients réels, il admet donc aussi deux racines complexes conjuguées b et $\bar{b}$.

Le terme constant du polynôme nous indique que le produit des trois racines est égal à 1. Donc

$$\alpha \times |b|^2 = 1$$

et par conséquent $|b| = \frac{1}{\sqrt{a}} < 1$.

✎ Il est utile d'avoir en tête les différentes formes possibles pour le graphe d'un polynôme de degré 3. À défaut de connaître les formules de Cardan (qui donnent les racines d'un polynôme de degré 3) ou de pouvoir les appliquer, on doit pouvoir localiser les racines en discutant sur les variations du polynôme.

2. On modélise le jeu de Pile ou Face par une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, (mutuellement) indépendantes et qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 1/2$ (puisque la pièce est supposée équilibrée).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n , l'ensemble des suites

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$$

pour lesquelles le plus petit indice k tel que

$$\varepsilon_{k-2} = \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k = 1$$

est égal à n . Autrement dit, E_n est l'ensemble des résultats possibles pour lesquels la séquence PPP apparaît pour la première fois au n -ième lancer et par conséquent

$$p_n = \mathbf{P}((X_1, \dots, X_n) \in E_n).$$

3.

Solution 58

rms130-985

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. b. Comme X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/n)$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{t}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{t-1}{n}\right)^n.$$

Soit X , une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(1)$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!} t^k = e^{t-1}.$$

On constate en effet que

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_{X_n}(t).$$

1. c. Soit $n \geq 2$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur le segment $[-1/2, 0]$:

$$\forall x \in [-1/2, 0], \quad |\ln(1+x) - x| \leq x^2.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| \ln\left(1 + \frac{t-1}{n}\right) - \frac{t-1}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| n \ln\left(1 + \frac{t-1}{n}\right) - (t-1) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il est clair que

$$\forall t \in [0, 1], \quad -1 \leq (t-1) \leq 0$$

et on en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad -1 - \frac{1}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{t-1}{n}\right) \leq 0.$$

On applique l'inégalité des accroissements finis (= Taylor-Lagrange à l'ordre 1) sur le segment $[-3/2, 0]$ à la fonction exp : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall -3/2 \leq u, v \leq 0, \quad |\exp(u) - \exp(v)| \leq K|u - v|$$

et on en déduit enfin que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \left| \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{t-1}{n}\right)\right] - \exp(t-1) \right| \leq \frac{K}{n}.$$

Le majorant est indépendant de $t \in [0, 1]$ et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite des fonctions génératrices des X_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction génératrice de X .

2. a. Par hypothèse,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k \quad \text{et} \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k)t^k.$$

Comme $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on sait que la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est (absolument) convergente, ce qui prouve que la série entière $\sum \mathbf{P}(X = k)t^k$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

Il en va bien sûr de même pour chaque variable aléatoire X_n .

Fixons arbitrairement un entier $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |G_n(t) - G(t)| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)| t^k && \text{(inégalité triangulaire (famille sommable))} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)| && \text{(car } 0 \leq t^k \leq 1) \\ &\leq \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X = k)| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \end{aligned}$$

(relation de Chasles et inégalité triangulaire).

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1.$$

On déduit alors de la relation de Chasles et de l'inégalité triangulaire (pour les familles finies) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) &= 1 - \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + \sum_{k=0}^N [\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)] \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)|. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$|G_n(t) - G(t)| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) + 2 \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)|.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est une série convergente de terme général positif, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leq \varepsilon.$$

🔗 La suite des restes tend vers 0.

L'entier N étant fixé, on déduit de l'hypothèse que la suite de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^N |\mathbf{P}(X = k) - \mathbf{P}(X_n = k)|$$

tend vers 0. Il existe donc un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad 0 \leq w_n \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq N_0, \forall t \in [0, 1], \quad |G_n(t) - G(t)| \leq 4\varepsilon.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t , donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad \|G_n - G\|_\infty \leq 4\varepsilon.$$

🔗 L'important ici est que l'entier N_0 dépende seulement du choix de ε (et pas de la valeur de t) pour établir la convergence uniforme — il n'aurait pas été plus simple de prouver la convergence simple !

2. b. Avec les mêmes notations, on suppose que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(t) = G(t). \quad (1)$$

♣ En particulier,

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = G_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(0) = \mathbf{P}(X = 0).$$

♣ **HR** : On suppose qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq k, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = i) = \mathbf{P}(X = i).$$

D'après **HR**,

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \mathbf{P}(X_n = i) t^i = \sum_{i=0}^k \mathbf{P}(X = i) t^i. \quad (2)$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad G_{n,k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1+i) t^i \\ G_{\infty,k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k+1+i) t^i. \end{aligned}$$

On retranche (2) de (1) et on divise par t^{k+1} pour obtenir

$$\forall 0 < t \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G_{n,k+1}(t) = G_{\infty,k+1}(t). \quad (3)$$

Il nous reste à vérifier que cette propriété est encore vraie pour $t = 0$, ce qui nous donnera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1) = \mathbf{P}(X = k+1).$$

♣ Soit F , la fonction génératrice d'une variable aléatoire quelconque Z à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) t^k.$$

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall 0 \leq t < 1, \quad F'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \mathbf{P}(Z = k+1) t^k.$$

On en déduit que

$$\forall 0 \leq t < 1, \quad 0 \leq F'(t) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k = \frac{1}{(1-t)^2}$$

et donc que F est 4-lipschitzienne sur $[0, 1/2]$, **indépendamment de la loi de Z** .

• Nos fonctions génératrices $G_{n,k+1}$ et $G_{\infty,k+1}$ sont donc uniformément lipschitziennes au voisinage de 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 < \alpha \leq 1/2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |G_{n,k+1}(0) - G_{\infty,k+1}(0)| &\leq |G_{n,k+1}(0) - G_{n,k+1}(\alpha)| \\ &\quad + |G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)| \\ &\quad + |G_{\infty,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(0)| \\ &\leq 8\alpha + |G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)|. \end{aligned}$$

• Soit alors $\varepsilon > 0$, assez petit pour que

$$0 < \alpha = \frac{\varepsilon}{16} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après (3), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad |G_{n,k+1}(\alpha) - G_{\infty,k+1}(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad |G_{n,k+1}(0) - G_{\infty,k+1}(0)| \leq \varepsilon.$$

On a bien démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k+1) = \mathbf{P}(X = k+1)$$

et notre démonstration par récurrence est terminée.

Solution 59

rms130-1045

On modélise l'expérience aléatoire par une famille $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires complexes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qu'on suppose indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Z = -1) = \mathbf{P}(Z = i) = \mathbf{P}(Z = -i) = \frac{1}{4}$$

qui représentent les *déplacements* successifs de la puce.

• Les *positions* occupées par la puce au fil du temps sont les variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + Z_{n+1}.$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n introduites par l'énoncé sont alors définies par

$$X_n = \Re(S_n) = \sum_{k=1}^n \Re(Z_k) \quad \text{et} \quad Y_n = \Im(S_n).$$

Comme les variables aléatoires Z_k sont indépendantes et de même loi, les variables aléatoires $\Re(Z_k)$ sont aussi indépendantes (lemme des coalitions) et de même loi :

$$\mathbf{P}(\Re(Z) = 1) = \mathbf{P}(\Re(Z) = -1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(\Re(Z) = 0) = \frac{1}{2}.$$

• On en déduit que

$$\mathbf{E}(\Re(Z)) = 0$$

et donc que (Koenig-Huyghens)

$$\mathbf{V}(\Re(Z)) = \mathbf{E}(\Re(Z)^2) = \frac{1}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\Re(Z_k)) = 0.$$

Par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{V}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(\Re(Z_k)) = \frac{n}{2}$$

et, à nouveau par la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \frac{n}{2}.$$

Solution 60

rms132-174

1. D'après le cours,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega)^2 = \|X(\omega) - \pi_V(X(\omega))\|^2 = \|(I - \pi_V)(X(\omega))\|^2 \leq \|X(\omega)\|^2$$

puisque $I - \pi_V$ est une projection orthogonale (la projection orthogonale sur $V^\perp$).

Comme les coordonnées de X sont des variables aléatoires de Rademacher,

$$\|X(\omega)\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2(\omega) = n$$

et on a donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq R(\omega) \leq \sqrt{n}.$$

2. Cf cours.

3. (Dorénavant, la variable ω sera sous-entendue.)

Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée. Par conséquent, d'après la première question,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^\top \cdot (I - P) \cdot X \\ &= X^\top \cdot (I - D - A) \cdot X \\ &= X^\top \cdot (I - D) \cdot X - X^\top \cdot A \cdot X. \end{aligned}$$

En notant $c_1, \dots, c_n$, les coefficients diagonaux de la matrice D ,

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{i=1}^n (1 - c_i) X_i^2 - X^\top \cdot A \cdot X \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - c_i) - X^\top \cdot A \cdot X \quad (\text{car } X_i^2 = 1) \\ &= (n - \text{tr } D) - X^\top \cdot A \cdot X. \end{aligned}$$

Par définition, les coefficients diagonaux de D sont aussi les coefficients diagonaux de P , donc $\text{tr } D = \text{tr } P = \text{rg } P$ (puisque la trace de toute projection est aussi le rang de cette projection). Comme π_V est la projection sur un sous-espace de dimension k , le rang de P est égal à k et on a donc bien

$$\forall \omega \in \Omega, \quad R^2(\omega) = n - k - X^\top(\omega) \cdot A \cdot X(\omega).$$

• Comme R^2 est une variable aléatoire bornée, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $a_{i,i} = 0$ (par construction de A) et d'après la formule du produit matriciel,

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{i \neq j} X_i \cdot a_{i,j} \cdot X_j.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires bornées. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\top \cdot A \cdot X) = \sum_{i \neq j} a_{i,j} \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes (puisque $i \neq j$) et centrées, donc

$$\forall i \neq j, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) = 0$$

donc $\mathbf{E}(X^\top \cdot A \cdot X) = 0$ et finalement

$$\mathbf{E}(R^2) = n - k.$$

4. Avec les notations utilisées plus haut,

$$\text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

On a déjà remarqué que

$$\sum_{i=1}^n c_i = \text{tr } D = \text{tr } P = k.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$k = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 1 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(D^2)}$$

et par conséquent

$$\text{tr}(D^2) \geq \frac{k^2}{n}.$$

5. On a justifié précédemment que

$$X^\top \cdot A \cdot X = \sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j$$

était une combinaison linéaire de variables aléatoires centrées. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] &= \mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) \\ &= \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 \mathbf{V}(X_i X_j) + \sum_{\substack{(i,j) \neq (p,q) \\ \text{avec } i \neq j, p \neq q}} a_{i,j} a_{p,q} \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_p X_q). \end{aligned}$$

• Pour $i \neq j$, le produit $X_i X_j$ est une variable aléatoire centrée, donc

$$\mathbf{V}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i^2 X_j^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

• Pour $(i, j) \neq (p, q)$ avec $i \neq j$ et $p \neq q$, il faut distinguer plusieurs cas.

- Si $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$, alors $X_i X_j$ et $X_p X_q$ sont indépendantes (lemme des coalitions), donc leur covariance est nulle.
- Si $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ est un singleton, on peut supposer que $i = p$ et $j \neq q$ (puisque $i \neq j$ et $p \neq q$). Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_i X_q) &= \mathbf{E}(X_i^2 X_j X_q) - \mathbf{E}(X_i X_j) \mathbf{E}(X_i X_q) \\ &= \mathbf{E}(X_j X_q) = 0 \end{aligned}$$

puisque $X_i^2 = 1$ et que les trois variables aléatoires $X_i X_j$, $X_i X_q$ et $X_j X_q$ sont centrées (les indices sont distincts).

► Enfin, si $\{i, j\} = \{p, q\}$, alors $i = q$ et $j = p$ (puisque les couples (i, j) et (p, q) sont distincts), donc

$$\mathbf{Cov}(X_i X_j, X_j X_i) = \mathbf{V}(X_i X_j) = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) = \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j} a_{j,i}.$$

Comme elle représente une projection orthogonale dans une base orthonormée, la matrice P est symétrique (réelle) et la matrice A est symétrique elle aussi, donc

$$\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] = \mathbf{V}\left(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\right) = 2 \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2.$$

• Il est temps de se souvenir de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] &= 2 \left[\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 \right] \\ &= 2 [\text{tr}(P^\top \cdot P) - \text{tr}(D^\top \cdot D)] \\ &= 2 [\text{tr } P - \text{tr}(D^2)] \end{aligned}$$

puisque $P^\top \cdot P = P^2 = P$ (matrice de projection orthogonale relative à une base orthonormée) et $D^\top \cdot D = D^2$ (matrice diagonale, donc symétrique).

On a vu plus haut que $\text{tr } P = k$ et d'après la minoration de la question précédente,

$$\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2] = 2[k - \text{tr}(D^2)] \leq 2\left[k - \frac{k^2}{n}\right] = \frac{2(n-k)k}{n}.$$

6. Comme R est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned} [R \geq \sqrt{n-k} + 2] &= [R^2 \geq n-k+4+4\sqrt{n-k}] \\ &= [-X^\top \cdot A \cdot X \geq 4+4\sqrt{n-k}] \\ &\subset [(X^\top \cdot A \cdot X)^2 \geq 16(1+\sqrt{n-k})^2]. \end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Markov et de la majoration précédente que

$$\mathbf{P}(R \geq \sqrt{n-k} + 2) \leq \frac{\mathbf{E}[(X^\top \cdot A \cdot X)^2]}{16(1+\sqrt{n-k})^2} \leq \frac{k}{8n} \cdot \frac{(n-k)}{(1+\sqrt{n-k})^2} \leq \frac{k}{8n}.$$

Solution 61

rms132-648-649-651

1. Comme $\#(E) = \binom{n}{m}$, on a $\mathbf{P}(A = F) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$ pour toute partie $F \in E$.

✚ Pour toute partie $F \in E$, on a

$$1 \leq \min F \leq n - m + 1 \quad \text{et} \quad m \leq \max F \leq n.$$

Par conséquent, $\min A$ et $M = \max A$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\llbracket 1, n - m + 1 \rrbracket$ et $\llbracket m, n \rrbracket$ respectivement.

✚ Il est fastidieux, mais pas difficile de prouver que $\min A$ et $\max A$ sont effectivement des variables aléatoires discrètes : on peut écrire $[\min A = k]$ et $[\max A = k]$ comme des unions finies disjointes d'ensembles de la forme $[A = F] \in \mathcal{A}$.

✚ Soit $m \leq k \leq n$. Le maximum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m-1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$.

Comme la loi de A est uniforme sur E ,

$$\forall m \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(M = k) = \mathbf{P}(\max A = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

✚ Soit $1 \leq k \leq n - m + 1$. Le minimum de $F \in E$ est égal à k si, et seulement si, l'entier k appartient à F et si les $(m-1)$ autres éléments de F sont choisis dans le sous-intervalle $\llbracket k+1, n \rrbracket$. Par conséquent,

$$\forall 1 \leq k \leq n - m + 1, \quad \mathbf{P}(\min A = k) = \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

✚ Remarque en passant

Comme $[\max A = m] = [A = \{1, \dots, m\}] \subset [\min A = 1]$, alors

$$[\max A = m] \cap [\min A = 1] = [\max A = m]$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) = \mathbf{P}(\max A = m) = \frac{1}{\binom{n}{m}} > 0.$$

Or la loi de $\min A$ est connue et comme $1 \leq m < n$,

$$\mathbf{P}(\min A = 1) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n} < 1.$$

Donc $\mathbf{P}(\min A = 1, \max A = m) \neq \mathbf{P}(\min A = 1) \mathbf{P}(\max A = m)$ et les deux variables $\min A$ et $\max A$ ne sont pas indépendantes.

✚ Passons à la loi du couple $(\min A, \max A)$.

► Comme la partie $A(\omega)$ compte m éléments, alors nécessairement

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \geq m - 1.$$

D'autre part, $\max A(\omega) \leq n$ et $\min A(\omega) \geq 1$, donc

$$\max A(\omega) - \min A(\omega) \leq n - 1.$$

Ainsi X est une variable aléatoire discrète (en tant que différence de deux variables aléatoires discrètes) à valeurs dans $\llbracket m-1, n-1 \rrbracket$.

► Soient donc deux entiers k et ℓ tels que

$$1 \leq k \leq n - m + 1, \quad m \leq \ell \leq n \quad \text{et} \quad m - 1 \leq \ell - k \leq n - 1.$$

Le minimum de $F \in E$ est égal à k et son maximum est égal à ℓ si, et seulement si, la partie F contient k et ℓ et si les $(m-2)$ éléments restants de F sont choisis dans le sous-intervalle $\llbracket k+1, \ell-1 \rrbracket$. L'astuce taupinale nous permet de dénombrer en toute sérénité :

$$\ell - 1 = k + (\ell - k - 1).$$

Il y a donc $(\ell - k - 1)$ entiers dans $\llbracket k+1, \ell-1 \rrbracket$ et par conséquent,

$$\mathbf{P}(\min A = k, \max A = \ell) = \frac{\binom{\ell-k-1}{m-2}}{\binom{n}{m}}.$$

✚ On peut en déduire la loi de X .

Soit $m-1 \leq q \leq n-1$. D'après la Formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = q) &= \sum_{k=1}^{n-m+1} \mathbf{P}(X = q, \min A = k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n-m+1 \\ k+q \leq n}} \mathbf{P}(\min A = k, \max A = k+q) \\ &= \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} = (n-q) \frac{\binom{q-1}{m-2}}{\binom{n}{m}} \end{aligned}$$

(puisque les termes de la somme sont tous égaux).

✎ Pour calculer les espérances de M et de X , il faut se souvenir que

$$\forall 1 \leq m < n, \quad \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Cette propriété peut se démontrer

→ par récurrence sur n (à partir de la formule dite du triangle de Pascal);

→ de manière combinatoire : choisir $(m+1)$ entiers dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ consiste à choisir d'abord le plus grand de ces entiers (on choisit K entre $(m+1)$ et $(n+1)$) et à choisir ensuite m entiers dans le sous-intervalle $\llbracket 1, K-1 \rrbracket$ — on prend $k = K-1$ pour écrire la somme);

→ en se fondant sur le fait que M est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket m, n \rrbracket$ et donc que

$$\sum_{k=m}^n \mathbf{P}(M = k) = 1.$$

(Il convient ici de décaler les valeurs de m et n .)

✚ L'espérance de M est, par définition, égale à

$$\sum_{k=m}^n k \mathbf{P}(M = k) = \sum_{k=m}^n k \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \sum_{k=m}^n m \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m(n+1)}{m+1}.$$

✚ On peut calculer de manière analogue

$$\mathbf{E}(\min A) = \sum_{k=1}^{n-m+1} k \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}} = (n+1) - \mathbf{E}(M).$$

(Il y a quelques astuces classiques en route.) Mais un tel résultat est surprenant et mérite d'être expliqué.

Comme l'application $\sigma : E \rightarrow E$ définie par

$$\forall F \in E, \quad \sigma(F) = \{n-x+1, x \in F\}$$

est une bijection de E dans E (c'est même une sorte de symétrie, puisque $\sigma \circ \sigma = I_E$) et comme la loi de A est uniforme sur E , on en déduit que la loi de $B = \sigma(A)$ est aussi la loi uniforme sur E :

$$\forall F \in E, \quad \mathbf{P}(B = F) = \mathbf{P}(\sigma(A) = F) = \mathbf{P}(A = \sigma^{-1}(F)) = \frac{1}{\#(E)}.$$

Comme A et B ont même loi, les variables aléatoires $\min A$ et $\min B$ ont également même loi et en particulier

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B).$$

Par définition de σ ,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad y \in B(\omega) \iff (n+1) - y \in A(\omega)$$

donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \min B(\omega) = (n+1) - \max A(\omega).$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\min A) = \mathbf{E}(\min B) = (n+1) - \mathbf{E}(\max A) = \frac{n+1}{m+1}.$$

Il est intéressant de noter que

$$\min A \stackrel{\text{loi}}{=} (n+1) - \max A$$

alors que ces deux variables ne sont certainement pas égales en tant que fonctions de Ω dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Par linéarité de l'espérance, on trouve enfin

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\max A) - \mathbf{E}(\min A) = \frac{(m-1)(n+1)}{m+1}.$$

2. Avec le modèle probabiliste précédent, $M = \max A$.

3. Avec le modèle probabiliste précédent, $\Delta = X$.

Solution 62

rms132-652

1. Il est clair que tous les p_k sont positifs. Il reste donc à prouver d'une part que la série $\sum p_k$ est convergente et d'autre part que la somme de cette série est égale à 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_k(x) = rx^{k-1}(1-x)^r.$$

► Il est clair que les fonctions f_k sont continues sur le segment $[0, 1]$ (puisque $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$). Elles sont donc intégrables sur cet intervalle.

► La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, 1]$ (série géométrique de raison x pour $0 \leq x < 1$; de terme général nul pour $x = 1$).

► La somme S_0 de cette série de fonctions est continue et intégrable sur $[0, 1[$ puisque

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad S_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = r(1-x)^{r-1} \quad \text{et} \quad S_0(1) = 0.$$

La somme S_0 n'est continue sur $[0, 1]$ que pour $r > 1$.

► Comme les fonctions f_k sont positives, on a donc

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq S_0(x).$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $[0, 1[$, donc la convergence est dominée.

On peut donc intégrer terme à terme : la série $\sum p_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-1} dx = 1.$$

2. Pour étudier l'espérance de X , on reprend la même étude avec la série de fonctions $\sum k f_k$.

✱ Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k(x) = r(1-x)^r \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = r(1-x)^{r-2}.$$

► Si $r > 1$, alors la somme S_1 est intégrable sur $[0, 1[$ et le même raisonnement que le précédent montre que la série $\sum k p_k$ est convergente (ce qui prouve que X est une variable d'espérance finie) et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-2} dx = \frac{r}{r-1}.$$

► Si $0 < r \leq 1$, alors la somme S_1 n'est pas intégrable sur $[0, 1[$.

Si la série $\sum k p_k$ était convergente, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k p_k = \int_0^1 k f_k(x) dx = \int_0^1 |k f_k(x)| dx$$

et on pourrait donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme à la série $\sum k f_k$. Dans ce cas, la somme S_1 serait une fonction intégrable sur $[0, 1[$, ce qui est faux.

✱ La série $\sum k p_k$ est donc convergente si, et seulement si, $r > 1$.

La variable X est donc une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, $r > 1$ et

$$\forall r > 1, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{r}{r-1}.$$

Solution 63

rms132-654

Comme de coutume, on notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

✱ Il est clair que U et V sont des applications de Ω dans $\mathbb{N}$.

✱ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par définition du minimum,

$$[U > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k] \in \mathcal{A}.$$

► On en déduit que

$$[U = 0] = [U > 0]^c \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad [U = k] = [U > k-1] \cap [U > k]^c \in \mathcal{A}$$

et donc que U est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

► Par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U > k) = \mathbf{P}(X_1 > k) \mathbf{P}(X_2 > k) = (q_1 q_2)^k$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k) = (q_1 q_2)^{k-1} [1 - q_1 q_2],$$

ce qui montre que U suit la loi géométrique de paramètre

$$p_0 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

(Il n'est pas nécessaire de s'assurer que $\mathbf{P}(U = 0) = 0$.)

✱ Par définition du maximum,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [V \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k].$$

► Comme plus haut, on en déduit que V est bien une variable aléatoire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [V = k] \in \mathcal{A}.$$

► De même, par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(V \leq k) = (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$$

et donc

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(V = k) = \mathbf{P}(V \leq k) - \mathbf{P}(V \leq k-1) = q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1} (1 - q_1 q_2).$$

Solution 64

rms132-655

Comme Y est strictement positive, le quotient X/Y est une variable aléatoire réelle.

Comme X et Y ont même loi, les variables aléatoires $\sqrt{Y}$ et $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ admettent des moments d'ordre deux et on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$1 = \mathbf{E}(1)^2 = \mathbf{E}\left(\sqrt{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}\right)^2 \leq \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et Y ont même loi, on en déduit que

$$1 \leq \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et $1/Y$ sont indépendantes et d'espérance finie, le produit $X \cdot \frac{1}{Y}$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \geq 1.$$

Solution 65

rms132-656

Comme X est bornée, elle admet un moment d'ordre deux et donc une variance.

• Si $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = b) = 1/2$, alors $\mathbf{E}(X) = (a + b)/2$ et

$$\mathbf{V}(X) = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

La majorant indiqué est donc la variance de la variable aléatoire qui prend les valeurs extrêmes avec équiprobabilité.

• La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[a, b]$ si, et seulement si, la variable aléatoire

$$X - \frac{a + b}{2}$$

prend ses valeurs dans le segment $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha = \frac{b-a}{2}$. De plus,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(X - \frac{a + b}{2}\right).$$

Pour résoudre le problème posé, on peut donc supposer que X prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$.

• Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$, alors il existe une variable aléatoire Y , indépendante de X et de même loi que $-X$. Par symétrie du segment, Y prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(-X) = \mathbf{V}(X).$$

La combinaison convexe

$$Z = \frac{X + Y}{2}$$

prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et, par indépendance de X et Y ,

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)}{2} = \mathbf{V}(X).$$

En outre, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)}{2} = \frac{\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)}{2} = 0.$$

On peut donc se restreindre aux variables aléatoires à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ qui sont *centrées* pour majorer la variance.

• Comme X est centrée et prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X(\omega) - \mathbf{E}(X))^2 = X^2(\omega) \leq \alpha^2$$

et par conséquent

$$\mathbf{V}(X) \leq \alpha^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Solution 66**rms132-661-669**

1. Comme X est positive et admet un moment d'ordre deux, alors elle est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) \geq 0$.
De plus, $\mathbf{P}(X = 0) < 1$ par hypothèse, donc $\mathbf{E}(X) > 0$ et (même raisonnement pour X^2) $\mathbf{E}(X^2) > 0$.
Comme $\lambda > 0$, on en déduit que le seuil $\lambda \mathbf{E}(X)$ est strictement positif.

✱ Pour tout $\omega \in \Omega$, on distingue deux cas :

- Si $X(\omega) < \lambda \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} = 0$ et donc

$$X(\omega) < \lambda \mathbf{E}(X) = \lambda \mathbf{E}(X) + X(\omega) \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}.$$

- Si au contraire $X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} = 1$ et donc

$$X(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} \leq X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} + \lambda \mathbf{E}(X)$$

car $\lambda \mathbf{E}(X) > 0$.

- Dans tous les cas, on a bien

$$X \leq \lambda \mathbf{E}(X) + X \mathbb{1}_{A_\lambda}$$

où la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{A_\lambda}$ est définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) = \mathbb{1}_{[X(\omega) \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}.$$

2. D'après cette inégalité,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) \geq X(\omega) - \lambda \mathbf{E}(X).$$

L'espérance est linéaire et conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}) \geq \mathbf{E}(X) - \lambda \mathbf{E}(X) = (1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X).$$

Or $\mathbf{E}(X) > 0$ et $0 < \lambda < 1$, donc $(1 - \lambda) \mathbf{E}(X) > 0$ et donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})^2 \geq [(1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X)]^2.$$

Par hypothèse, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre deux et toute variable aléatoire de Bernoulli admet également un moment d'ordre deux : on peut donc appliquer l'inégalité de Schwarz.

$$[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})]^2 \leq \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_\lambda}^2) = \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda)$$

On en déduit finalement que

$$\mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda) \geq [\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})]^2 \geq [(1 - \lambda) \cdot \mathbf{E}(X)]^2.$$

Solution 67**rms132-668**

1.

✎ Exercice infaisable dans le cadre du programme : il s'appuie d'une part sur la formule de l'espérance totale (une variante de la formule des probabilités totales) et d'autre part sur la propriété de Markov...

Allons-y comme d'habitude — à la one-again.

✱ Comme on retire au moins une boule à chaque tirage et que l'urne contient initialement n boules, les valeurs de X_n sont comprises entre 1 et n . Par conséquent, X_n est bornée et donc d'espérance finie (s'il s'agit bien d'une variable aléatoire).

✱ Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule boule dans l'urne, qu'on enlève au premier tirage. Par conséquent, la variable aléatoire X_1 est constante, égale à 1, et $\mathbf{E}(X_1) = 1$.

✱ Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne.

Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $[B_1 = i]$ le fait que la première boule tirée soit la boule numérotée i et admettons que

$$\mathbf{P}(B_1 = 1) = \mathbf{P}(B_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

- Si la première boule tirée est la boule 1, alors l'urne est vidée du premier coup : $X_2 = 1$.

- Sinon, il ne reste plus que la boule 1 et l'urne est nécessairement vidée au second coup : $X_2 = 2$.

- On en déduit que

$$[X_2 = 1] = [B_1 = 1] \quad \text{et} \quad [X_2 = 2] = [B_1 = 2]$$

donc $X_2 = B_2$ et par conséquent

$$\mathbf{E}(X_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

2. Si l'urne contient initialement n boules, alors on dispose d'un système complet d'événements :

$$[B_1 = 1], [B_1 = 2], \dots, [B_1 = n]$$

qui sont tous de probabilité $1/n$. (Ces événements nous indiquent quelle est la première boule tirée.)

Comme X_n est une variable aléatoire d'espérance finie, on peut appliquer la formule de l'espérance totale :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{B_1=k}(X_n) \cdot \mathbf{P}(B_1 = k).$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors X_n prend nécessairement la valeur 1, donc

$$\mathbf{E}_{B_1=1}(X_n) = 1.$$

► Pour $2 \leq k \leq n$, si la première boule tirée est la boule k , alors *après avoir tiré cette première boule*, on continue pour vider une urne qui contient $(k-1)$ boules. "Donc" (rires nerveux dans l'assistance qui connaît la théorie des chaînes de Markov)

$$\forall 2 \leq k \leq n, \quad \mathbf{E}_{B_1=k}(X_n) = \underbrace{1}_{\text{premier tirage}} + \underbrace{\mathbf{E}(X_{k-1})}_{\text{tirages suivants}}.$$

► Bref :

$$\mathbf{E}(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \mathbf{E}(X_{k-1}) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_k).$$

3. En posant $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, on dispose de la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = n(u_n - 1)$$

et donc que

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} [n(u_n - 1) + u_n] = 1 - \frac{n}{n+1} + u_n.$$

Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $u_1 = 1$,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Solution 68

rms132-670

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont bornées et sont donc d'espérance finie.

1. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = [\mathbf{E}(e^{tX})]^n.$$

D'après la loi de X ,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On vérifie sans peine (par récurrence) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2^k \cdot k! \geq (2k)!.$$

On en déduit que

$$\text{ch } t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^k}{2^k \cdot k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc que

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp(nt^2/2).$$

2. Comme la loi des X_k est symétrique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \{\pm 1\}, \quad \mathbf{P}(X_k = x) = \mathbf{P}(X_k = -x) = \frac{1}{2}$$

et que les X_k sont indépendantes, alors

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\text{loi}}{=} (-X_1, \dots, -X_n).$$

Par conséquent,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{k=1}^n (-X_k) = -S_n.$$

On en déduit que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbf{P}(-S_n \geq a) = \mathbf{P}(S_n \geq a)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a) = \mathbf{P}(S_n \geq a) + \mathbf{P}(S_n \leq -a) = 2 \mathbf{P}(S_n \geq a).$$

• Pour tout $t > 0$, la fonction $[u \mapsto e^{tu}]$ est strictement croissante, donc

$$[S_n \geq a] = [e^{tS_n} \geq e^{ta}].$$

Comme e^{tS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbf{P}(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq e^{-ta} \mathbf{E}(e^{tS_n})$$

et on déduit de la première inégalité que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-ta} e^{nt^2/2}.$$

• On remarque alors que le membre de gauche est indépendant de $t > 0$: on peut donc passer à la borne inférieure selon le paramètre t .

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq \inf_{t>0} 2e^{-ta} e^{nt^2/2}.$$

Pour cela, on étudie les variations de

$$f(t) = -at + \frac{nt^2}{2}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+^*$: il s'agit d'un trinôme du second degré, qui atteint son minimum pour $t = a/n > 0$ et ce minimum est égal à $f(a/n) = -\frac{a^2}{2n}$. Par croissance de $\exp$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \forall a > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2 \exp \frac{-a^2}{2n}.$$

Solution 69

rms132-881

1. Pour $0 \leq k \leq n$,

$$[X > k] = [X = k+1] \sqcup \dots \sqcup [X = n] \sqcup [X > n]$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X > k) = \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=k+1}^n \mathbf{P}(X = i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=k+1}^n \mathbf{P}(X = i) = (n+1) \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{P}(X = i) \\ &= (n+1) \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}(X = i). \end{aligned}$$

Il reste à rajouter le terme $\mathbf{P}(X = i)$ pour $i = 0$, qui est évidemment nul, pour obtenir le résultat souhaité.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[X > n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k].$$

Il s'agit d'une union **dénombrable** d'événements deux à deux disjoints, donc la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est convergente et

$$\mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)$$

(par σ -additivité de $\mathbf{P}$).

Si X est d'espérance finie, alors la série $\sum k \mathbf{P}(X = k)$ est convergente et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = 0.$$

Or

$$\forall k \geq n+1, \quad 0 \leq (n+1) \mathbf{P}(X = k) \leq k \mathbf{P}(X = k)$$

et donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq (n+1) \mathbf{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k).$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 0.$$

La relation démontrée précédemment montre que la suite des sommes partielles de $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente (somme de deux suites convergentes), ce qui prouve que la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(X).$$

3. Si X n'est pas d'espérance finie, alors la série de terme général positif $\sum k \mathbf{P}(X = k)$ est divergente, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

D'après la relation établie à la première question,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) \geq \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k)$$

et par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > n) = +\infty.$$

On a donc démontré qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

On peut aboutir au même résultat en démontrant que la famille $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ définie par

$$\forall 0 \leq n \leq k, \quad u_{n,k} = 0$$

et par

$$\forall 0 \leq k < n, \quad u_{n,k} = \mathbf{P}(X = n)$$

est sommable si, et seulement si, X est une variable aléatoire d'espérance finie. (Évidemment, il faut utiliser plusieurs fois le Théorème de Fubini.)

Solution 70**rms132-984**

1. On modélise les tirages par une famille $(U_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en faisant l'hypothèse que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{0, 1\}^k, \quad \mathbf{P}(U_{k+1} = 1 \mid U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_k = \varepsilon_k) = \frac{n - \sigma_k}{2n - k}$$

où $\sigma_k = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$.

☞ Ce modèle est raisonnable : si l'événement $[U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_k = \varepsilon_k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu $\sigma_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$ fois "1". On a donc obtenu $k - \sigma_k$ fois "0". Comme l'urne contient initialement n boules de type "1" et n boules de type "0", il reste donc $(2n - k)$ boules, parmi lesquelles on compte $(n - \sigma_k)$ boules de type "1" et (donc) $(n - k + \sigma_k)$ boules de type "0". Le quotient $(n - \sigma_k)/(2n - k)$ peut donc s'interpréter comme une hypothèse d'équiprobabilité sur le résultat du $(k + 1)$ -ième tirage.

En supposant de plus que

$$\mathbf{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2} \left(= \frac{n}{2n} \right),$$

ce modèle est complet, puisque les hypothèses qu'on vient de poser permettent de calculer

$$\mathbf{P}(U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_{2n} = \varepsilon_{2n})$$

quel que soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}) \in \{0, 1\}^{2n}$ par l'intermédiaire de la Formule des probabilités composées.

♣ On peut en particulier vérifier que

$$\mathbf{P}(U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_{2n} = \varepsilon_{2n}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

pour toute famille $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ telle que $\sigma_{2n} = n$ (= les familles qui constituent le support de la loi du vecteur $(U_k)_{1 \leq k \leq 2n}$).

Cette forme d'équiprobabilité va nous permettre de ramener le calcul de la loi de X_n à du dénombrement.

► L'événement $[X_n = k]$ signifie qu'il ne reste k boules, toutes du même type, dans l'urne. On a donc effectué $(2n - k)$ tirages, qui ont amené les n boules d'un premier type et $(n - k)$ du second type :

$$[X_n = k] = [X_n = k, U_{2n} = 1] \sqcup [X_n = k, U_{2n} = 0]$$

et par équiprobabilité

$$\mathbf{P}(X_n = k) = 2 \mathbf{P}(X_n = k, U_{2n} = 0).$$

► D'après la règle du jeu, l'événement $[X_n = k, U_{2n} = 0]$ est égal à

$$[X_n = k, \underbrace{U_{2n-k} = 1}_{\text{dernière boule de type "1"}}, \underbrace{U_{(2n-k)+1} = U_{(2n-k)+2} = \dots = U_{(2n-k)+k} = 0}_{\text{les } k \text{ derniers tirages}}].$$

C'est donc la réunion de tous les événements

$$[U_1 = \varepsilon_1, \dots, U_n = \varepsilon_n]$$

tels que $\varepsilon_{2n-k} = 1$ et $\varepsilon_{2n-k+1} = \varepsilon_{2n-k+2} = \dots = \varepsilon_{2n} = 0$.

Comme il existe exactement $\binom{2n-k-1}{n-1}$ événements de ce genre (on place les $(n - 1)$ boules de type "1" qui ont précédé la dernière boule de type "1" parmi les $(2n - k - 1)$ premiers tirages), on en déduit que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{2 \binom{2n-k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

☞ Il n'est pas inutile de vérifier la cohérence de ce résultat ! Comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{2n-k-1}{n-1} &= \sum_{k=1}^n \binom{(n-1) + (n-k)}{n-1} = \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{k}{n-1} && (k \leftarrow 2n-k-1) \\ &= \binom{2n-1}{n} && (\text{triangle de Pascal}) \\ &= \frac{n}{2n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

on a bien $\mathbf{P}(X_n = 1) + \dots + \mathbf{P}(X_n = n) = 1$.

2. On modélise la seconde expérience par une famille $(V_k)_{1 \leq k \leq 2n+2}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en supposant que la probabilité

$$\mathbf{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2})$$

est la même pour tout vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq 2n+2} \in \{0, 1\}^{2n+2}$ tel que

$$\sigma_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k = n+1.$$

Cela revient à dire qu'on effectue de manière équiprobable $(2n+2)$ tirages successifs, tantôt dans l'urne "1", tantôt dans l'urne "0", et qu'on effectue exactement $(n+1)$ tirages dans chacune des urnes.

Le cardinal de l'ensemble E_{n+1} des vecteurs ε tels que $\sigma_{2n+2} = n+1$ est égal à $\binom{2n+2}{n+1}$ (on choisit les positions de n éléments égaux à "0" parmi $(2n+2)$ positions possibles, les n éléments égaux à "1" occuperont les positions restées libres).

► Ce modèle est évidemment complet, puisque la loi du vecteur aléatoire $(V_k)_{1 \leq k \leq 2n+2}$ est parfaitement définie.

► Ce modèle est aussi raisonnable au regard de la situation étudiée.

En effet, dans l'énoncé, chaque urne contient n boules et après avoir tiré les n boules de l'urne, il faut un $(n+1)$ -ième tirage pour constater que l'urne est vide.

On peut aussi bien imaginer que chaque urne contient en fait $(n+1)$ boules et que la procédure s'arrête lors du tirage de cette $(n+1)$ -ième boule fictive : cet artifice permet de ramener cette nouvelle situation à la situation précédente.

► Il reste cependant à vérifier que ce modèle est cohérent avec l'énoncé qui exige que

$$\forall 1 \leq k \leq 2n+2, \quad \mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Or

$$[V_k = 1] = \bigsqcup_{\substack{\varepsilon \in E_{n+1} \\ \text{t.q. } \varepsilon_k = 1}} [V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{2n+2} = \varepsilon_{2n+2}].$$

Ces événements sont tous équiprobables et leur nombre est égal à $\binom{2n+1}{n}$ (il faut placer n "1", la position k est occupée par un "1" et on choisit n positions parmi les $(2n+1)$ autres positions pour placer les n autres "1"). Donc

$$\mathbf{P}(V_k = 1) = \frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Jusqu'ici, tout va bien...

► La valeur prise par la variable aléatoire Y_n est comprise entre 0 (lorsqu'on vide la seconde urne avant de constater que la première urne vidée est bien vide) et n (lorsqu'on constate qu'une urne est vide avant de tirer la première boule de l'autre urne).

► Comme dans le premier cas,

$$[Y_n = k] = [Y_n = k, V_{2n+2} = 0] \sqcup [Y_n = k, V_{2n+2} = 1]$$

et par équiprobabilité,

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = 2\mathbf{P}(Y_n = k, V_{2n+2} = 0).$$

L'événement $[V_{2n+2} = 0]$ signifie que le dernier tirage a lieu dans l'urne "0" et donc qu'on a déjà constaté que l'urne "1" a été vidée.

La contrainte $[Y_n = k]$ signifie alors qu'on a tiré k fois de suite dans l'urne "0" avant d'effectuer le $(2n+2)$ -ième et dernier tirage (également dans l'urne "0"). Autrement dit, on s'intéresse aux événements

$$[(V_1, \dots, V_{2n+2}) = \varepsilon]$$

tels que

$$V_{2n+1-k} = 1, \quad V_{(2n+1-k)+1} = \dots = V_{(2n+1-k)+k} = 0, \quad V_{2n+2} = 0$$

(on constate que l'urne "1" est vide; on tire encore k boules dans l'urne "0" et on constate pour finir que l'urne "0" est vide elle aussi).

Le nombre de ces événements est égal à $\binom{2n-k}{n}$ (on choisit la place des n boules "1" parmi les $(2n-k)$ positions libres) et par conséquent

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2 \binom{2n-k}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}.$$

On constate que les variables aléatoires Y_n et $X_{n+1} - 1$ suivent la même loi : les encadrements $1 \leq k \leq n+1$ et $0 \leq k-1 \leq n$ sont équivalents et

$$\mathbf{P}(X_{n+1} - 1 = k - 1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{2 \binom{2(n+1)-k-1}{(n+1)-1}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \frac{2 \binom{2n-(k-1)}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \mathbf{P}(Y_n = k - 1).$$

Si on veut traiter l'exercice dans le temps imparti, il serait judicieux de partir de cette remarque, en la fondant par un argument combinatoire (sans entrer dans les détails).

Comme Y_n est bornée, c'est bien une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(Y_n = k) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{n} = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \left[2n \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} - \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} \right]. \quad (k \leftarrow 2n - k)$$

D'après la formule du triangle de Pascal (généralisée),

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{2n} k \binom{k}{n} = (n+1) \binom{2n+2}{n+2} - \binom{2n+1}{n+1}$$

donc

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}(Y_n) = \frac{2}{\binom{2n+2}{n+1}} \cdot \left[(2n+1) \binom{2n+1}{n+1} - (n+1) \binom{2n+2}{n+2} \right].$$

Après quelques simplifications,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n}{n+2}$$

qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution 71

rms132-1108

Avant de faire le moindre calcul, il convient de définir le modèle probabiliste qui va représenter l'expérience aléatoire étudiée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies une variable aléatoire U de loi uniforme sur $\llbracket 0, p \rrbracket$ et une variable aléatoire $N_p : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ telle que

$$\forall 0 \leq i \leq p, \forall 0 \leq j \leq n, \quad \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i) = \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

La variable U représente le choix de l'urne et le conditionnement par l'événement $[U = i]$ signifie qu'on a choisi l'urne i . La proportion de boules blanches dans cette urne est égale à i/p et, comme d'habitude, le nombre de succès en n tirages successifs avec remise dans cette urne est alors modélisé par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, i/p)$.

1. Les valeurs possibles pour N_p sont les entiers $0 \leq j \leq n$.

Soit $0 \leq j \leq p$. Il est clair que

$$[N_p = j] = \bigsqcup_{i=0}^p [N_p = j, U = i]$$

donc, par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \sum_{i=0}^p \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i) \mathbf{P}(U = i)$$

et, sous les hypothèses que nous venons de faire,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

2. Comme la variable aléatoire N_p ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_p) &= \sum_{j=0}^n j \mathbf{P}(N_p = j) = \sum_{j=0}^n \frac{j}{p+1} \sum_{i=0}^p \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p n \cdot \frac{i}{p} \\ &= \frac{n}{p(p+1)} \cdot \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (*)$$

On aura reconnu en (*) l'expression de l'espérance pour la loi $\mathcal{B}(n, i/p)$ et on sait que l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n, x)$ est égale à nx .

🔗 Le calcul ci-dessus est en fait un cas particulier très simple de la **Formule de l'espérance totale** : si N est une variable aléatoire d'espérance finie et si $U : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, N est une variable aléatoire d'espérance finie pour $\mathbf{P}_{[U=j]}$ et

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_{U=j}(N) \cdot \mathbf{P}(U = j).$$

🔗 Par ailleurs, le résultat trouvé n'est pas surprenant : dans le modèle adopté, les boules blanches et les boules noires jouent des rôles symétriques. On en déduit que le nombre moyen de boules blanches est égal au nombre moyen de boules noires. Comme le nombre total de boules tirées est égal à n , le nombre moyen de boules blanches tirées doit être égal à $n/2$.

3. La fonction $[t \mapsto t^j(1-t)^{n-j}]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc la somme de Riemann

$$\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}$$

converge vers

$$\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j} dt$$

lorsque p tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_p = j) = \binom{n}{j} \int_0^1 t^j(1-t)^{n-j} dt.$$

🔗 Par intégrations par parties successives,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^i(1-t)^j dt = \frac{i!j!}{(i+j+1)!}$$

donc

$$\forall 0 \leq j \leq n, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N_p = j) = \frac{1}{n+1}.$$

🔗 Ainsi, si le nombre d'urnes est très grand, la loi de N_p tend à devenir la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Solution 72

rms132-1123a

1. On démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{p^n}{n!} \mathbf{P}(X = 0).$$

À un facteur près, on reconnaît la loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$, donc $\mathbf{P}(X = 0) = e^{-p}$.

2. Comme X est positive, la variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$ est bornée (ses valeurs sont comprises entre 0 et 1), donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et son espérance peut se calculer à l'aide de la Formule de transfert. On a donc

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \cdot e^{-p} \frac{p^k}{k!} = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{p^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-p}}{p} \cdot (e^p - 1) = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$$

Solution 73**rms132-1123b**

1. D'après le cours (additivité de la loi de Poisson), la variable aléatoire $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
2. Comme $X + Y$ suit une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X + Y = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

► Comme Y est à valeurs positives, on a $X(\omega) \leq X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Pour tout entier $k > n$, on a donc

$$[X = k] \cap [X + Y = n] = \emptyset$$

et donc $\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = 0$.

► Pour $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k | X + Y = n) &= \frac{\mathbf{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbf{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k)}{\mathbf{P}(X + Y = n)} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

• On reconnaît la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Par conséquent,

$$\mathbf{E}_{X+Y=n}(X) = n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X | X + Y = n) = n \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

Solution 74**rms132-1123c**

▮ Si U et V sont deux variables aléatoires de carré intégrable, alors leur coefficient de corrélation linéaire est défini par :

$$\rho(U, V) = \frac{\mathbf{Cov}(U, V)}{\sigma(U) \cdot \sigma(V)}$$

(où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X).

D'après l'inégalité de Schwarz, le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1 . D'après le cas d'égalité, il est égal à ± 1 si, et seulement si, il existe un couple réel $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que la combinaison linéaire $\alpha U + \beta V$ soit presque sûrement constante.

Comme X, Y et Z suivent une loi de Poisson, ce sont des variables aléatoires de carré intégrable. Par combinaisons linéaires, les variables aléatoires U et V sont aussi de carré intégrable, donc leur coefficient de corrélation linéaire est bien défini.

Par bilinéarité de la covariance,

$$\mathbf{Cov}(U, V) = \mathbf{Cov}(Y, Y) = \mathbf{V}(Y) = b.$$

puisque des variables aléatoires indépendantes sont décorrélées.

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances, donc

$$\sigma(U) \cdot \sigma(V) = \sqrt{\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)} \sqrt{\mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z)} = \sqrt{(a + b)(b + c)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire de U et V est donc égal à

$$\frac{b}{\sqrt{(b + a)(b + c)}}.$$

Solution 75**rms132-1180**

1. Chaque N -liste $\omega \in E$ est caractérisée par les positions occupées par les r chiffres 1, il s'agit donc de choisir r positions parmi les N positions disponibles. Il y a donc $\binom{N}{r}$ éléments dans E .
2. a. Une N -liste $\omega \in E$ appartient à l'événement $[X = k]$ si, et seulement si, $\omega_k = 1$ et $\omega_\ell = 0$ pour tout $k < \ell \leq N$. Autrement dit, il faut répartir les $(r - 1)$ premiers chiffres 1 parmi les $(k - 1)$ premiers termes de la liste.

► Si $k < r$, c'est impossible.

► Si $r \leq k \leq N$, il y a $\binom{k-1}{r-1}$ listes possibles et par hypothèse d'équiprobabilité,

$$\forall r \leq k \leq N, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

2. b. Pour $r = 1$, la loi de X est uniforme sur $[1, N]$:

$$\forall 1 \leq k \leq N, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{N}.$$

✎ Pour $r = N$, la variable X est constante, égale à N : $\mathbf{P}(X = N) = 1$.

3. Comme X est une variable aléatoire bornée (elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs), c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=r}^N k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=r}^N k \cdot \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \sum_{k=r}^N r \cdot \frac{\binom{k}{r}}{\binom{N}{r}} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \cdot \binom{N+1}{r+1}$$

d'après la formule (généralisée) du triangle de Pascal. Après simplification, on trouve :

$$\mathbf{E}(X) = r \cdot \frac{N+1}{r+1}.$$

✎ Il est facile de vérifier que cette formule est correcte pour $r = 1$ et pour $r = N$.

Solution 76

rms132-1181

1. a. La probabilité de tirer au moins un ticket gagnant est égale à $\mathbf{P}(X \geq 1)$, c'est-à-dire à

$$\mathbf{P}(n, p) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^p.$$

1. b. On sait alors bien que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(p^2, p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p = 1 - e^{-1}.$$

2. a. Il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p tickets parmi n tickets deux à deux distincts (par définition du coefficient binomial).

2. b. Comme il y a p tickets gagnants,

— ou bien $2p > n$, et chaque tirage contient au moins un ticket gagnant ;

— ou bien $2p \leq n$, et il y a $\binom{n-p}{p}$ manières de choisir les p tickets tirés de l'urne parmi les $(n-p)$ tickets perdants.

Avec la convention habituelle,

$$Q(n, p) = 1 - \frac{\binom{n-p}{p}}{\binom{n}{p}}.$$

2. c. Avec $n = p^2$,

$$Q(n, p) = 1 - \frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!}.$$

Avec la formule de Stirling,

$$\frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2p^2 - 2p} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{2p - p^2}$$

et par conséquent

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} Q(p^2, p) = 1 - e^{-1}.$$

3. Si les tickets sont tous discernables, il s'agit de compter le nombre de p -listes constituées à partir de n éléments : il y a donc

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

cas possibles. Parmi ces cas possibles, on exclut les p -listes formées à partir des $(n-p)$ tickets perdants :

— si $2p > n$, chaque liste contient au moins un ticket gagnant ;

— si $2p \leq n$, il faut éliminer $\frac{\binom{n-p}{p}}{\binom{n-2p}{p}}$ listes.

L'hypothèse d'équiprobabilité nous conduit alors à

$$Q(n, p) = 1 - \frac{[(n-p)!]^2}{n!(n-2p)!}$$

c'est-à-dire au même résultat que dans le modèle précédent.

Solution 77**rms132-1182**

On modélise l'expérience par une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

La valeur de X_n indique le jeton obtenu lors du n -ième tirage.

1. Pour obtenir deux jetons différents, il faut tirer au moins deux jetons...

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$[Y = n] = [X_1 = \dots = X_{n-1} \neq X_n] = \bigsqcup_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} [X_1 = \dots = X_{n-1} = i, X_n \neq i] \in \mathcal{A}.$$

Cette égalité démontre que Y est bien une variable aléatoire discrète sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Par additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit aussi que

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{P}(Y = n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{n-1}}$$

puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et que

$$\forall k \geq 1, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbf{P}(X_k \neq i).$$

2. La variable aléatoire $(Y - 1)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [Y - 1 = k] = [Y = k + 1].$$

Par conséquent,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(Y - 1 = k) = \frac{2}{3^{(k+1)-1}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

La variable aléatoire $(Y - 1)$ suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(2/3)$. On en déduit que

$$\mathbf{E}(Y - 1) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y - 1) = \frac{q}{p^2} = \frac{3}{4}$$

et donc que $\mathbf{E}(Y) = 5/2$ (par linéarité) et $\mathbf{V}(Y) = 3/4$ (invariance de la variance par translation).

3. Le nombre Z de tirages nécessaires pour obtenir les trois jetons est strictement supérieur au nombre Y de tirages nécessaires pour obtenir deux jetons différents.

Chaque succession de tirages définit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$: le premier jeton qui apparaît est $\sigma(1)$; le premier jeton différent du précédent, qui apparaît au Y -ième tirage, est $\sigma(2)$; le dernier jeton, qui apparaît au Z -ième tirage, est $\sigma(3)$. Ainsi, avant le Y -ième tirage, on ne tire que le jeton $\sigma(1)$; entre le Y -ième tirage et le Z -ième tirage, on tire à nouveau un jeton déjà tiré, c'est-à-dire $\sigma(1)$ ou $\sigma(2)$ mais pas $\sigma(3)$.

Par conséquent, quels que soient les entiers m et n tels que $2 \leq m < n$,

$$\begin{aligned} [Y = m, Z = n] &= [X_1 = \dots = X_{m-1} \neq X_m] \cap [X_{m+1}, \dots, X_{n-1} \in \{X_{m-1}, X_m\}] \cap [X_n \notin \{X_{m-1}, X_m\}] \\ &= \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [X_1 = \dots = X_{m-1} = \sigma(1), X_m = \sigma(2)] \cap [X_{m+1} \neq \sigma(3), \dots, X_{n-1} \neq \sigma(3)] \cap [X_n = \sigma(3)] \\ &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

ce qui prouve, si besoin était, que (Y, Z) est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et donc que Z est bien une variable aléatoire.

Comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, tous les événements qui apparaissent dans la décomposition précédente de $[Y = m, Z = n]$ ont même probabilité :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1} \cdot \frac{1}{3}$$

et comme $\#\mathfrak{S}_3 = 6$,

$$\forall 2 \leq m < n, \quad \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{3}{2^m} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

4. Connaissant la loi du couple (Y, Z) , il est facile d'en déduire la loi (marginale) de Z .

$$\forall n \geq 3, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}.$$

Solution 78**rms132-1185**

1. D'après la formule du binôme,

$$(1 + X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = [(1 + X)^n]^2 = \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right]^2.$$

Il est plus simple d'écrire un polynôme comme une somme infinie dont le terme général est nul à partir d'un certain rang pour appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right]^2 = \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \right]^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k \quad \text{avec} \quad b_k = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i}.$$

En particulier, pour $k = n$, on a $0 \leq k - i \leq n$ pour tout $0 \leq i \leq k$ et donc

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad a_i = \binom{n}{i} \quad \text{et} \quad a_{k-i} = \binom{n}{k-i} = \binom{n}{i}$$

(par symétrie des coefficients binomiaux).

Par unicité de la décomposition d'un polynôme dans la base canonique,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

2. La matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

- ou bien $x_1 \neq x_2$, et la matrice est diagonalisable (comme toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admettant deux valeurs propres distinctes);
- ou bien $x_1 = x_2$, et la matrice n'est pas diagonalisable (puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre double x_1 est la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 0)$).

Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'événement $[X_1 = X_2]$.

En décomposant cet événement sur le système complet $([X_1 = k])_{0 \leq k \leq n}$,

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^n [X_1 = k, X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^n [X_1 = k, X_2 = k].$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$ et par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(X_2 = k) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \right]^2$$

donc

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

✎ D'après la formule de Stirling,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Il est logique que cette probabilité tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: les deux variables aléatoires sont indépendantes et prennent des valeurs de plus en plus nombreuses, il est donc de plus en plus rare qu'elles prennent la même valeur en même temps.

Solution 79

rms132-1186

✎ Commençons par présenter tous les résultats sur les séries entières dont nous aurons besoin dans la suite pour calculer l'espérance et la variance de cette **loi de Pascal**.

On sait que le rayon de convergence de la série (géométrique) $\sum x^k$ est égal à 1 et que

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \quad (4)$$

Par conséquent, on peut dériver terme à terme autant qu'on veut :

$$\forall 0 \leq x < 1, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \quad (5)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \quad (6)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3}. \quad (7)$$

1. La famille $(p_k)_{k \geq 1}$ est une famille de réels positifs. D'après les séries entières rappelées ci-dessus (5), c'est aussi une famille sommable, dont la somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p^2 f'(q) = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1$$

donc c'est bien une loi de probabilité.

2. D'après la formule de transfert, la variable aléatoire $X-1$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum (k-1)p_k$ est absolument convergente. D'après (6), c'est bien le cas et

$$\mathbf{E}(X-1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)p_k = p^2 q f''(q) = \frac{2p^2 q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p}.$$

✎ De même, comme la série $\sum (k-1)(k-2)p_k$ converge absolument (7), la variable $(X-1)(X-2)$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}[(X-1)(X-2)] = \sum_{k=3}^{+\infty} (k-1)(k-2)p_k = p^2 q^2 f^{(3)}(q) = \frac{6q^2}{p^2}.$$

3. Il est clair que $X = (X-1) + 1$, donc X est une variable aléatoire d'espérance finie (en tant que somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X-1) + 1 = \frac{2q}{p} + 1 = \frac{1+q}{p}.$$

De même, $X^2 = (X-1)(X-2) + 3X - 2$, donc X est une variable aléatoire de carré intégrable (puisque son carré est une somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, à nouveau par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}[(X-1)(X-2)] + 3\mathbf{E}(X) - 2 = \frac{p^2 - 6p + 6}{p^2}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = \frac{2q}{p^2}.$$

✎ On pouvait aussi calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X :

$$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 k q^{k-1} t^k = p^2 t \sum_{k=1}^{+\infty} k (qt)^{k-1} = p^2 t f'(qt) = \frac{p^2 t}{(1-qt)^2}. \quad (8)$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à $1/q > 1$, donc X admet des moments de tout ordre et

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1+q}{p}, \quad \mathbf{E}[X(X-1)] = G''(1) = \frac{4q}{p} + \frac{6q^2}{p^2}$$

ce qui permet de retrouver (plus rapidement, à mon goût) la variance de X .

Solution 80**rms132-1189**

1. Une variable aléatoire de Bernoulli admet un moment d'ordre deux. Comme l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de variables aléatoires de Bernoulli, et en particulier la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

admet aussi un moment d'ordre deux. On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

▮ Variante

Comme les variables aléatoires de Bernoulli ne prennent que les valeurs 0 et 1, on sait que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq Y_n(\omega) \leq 1.$$

En tant que variable aléatoire bornée, Y_n admet des moments de tous les ordres et en particulier un moment d'ordre deux.

▮ Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = \bar{p}_n.$$

Comme les X_k sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k).$$

On doit savoir que

$$\forall 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$$

et donc que

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \mathbf{V}(Y_n) \leq \frac{1}{4n}.$$

▮ D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

On déduit de cet encadrement que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\eta = \varepsilon/2 > 0$.

▮ Comme $\bar{p}_n$ tend vers p et que $\eta > 0$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |\bar{p}_n - p| \leq \eta.$$

▮ D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\forall n \geq 1, \quad |Y_n(\omega) - p| \leq |Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + |\bar{p}_n - p|$$

et en particulier

$$\forall n \geq n_0, \quad |Y_n(\omega) - p| \leq |Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + \eta.$$

Par conséquent, pour $n \geq n_0$, si

$$|Y_n(\omega) - p| \geq \varepsilon,$$

alors

$$|Y_n(\omega) - \bar{p}_n| + \eta \geq \varepsilon$$

et donc

$$|Y_n(\omega) - \bar{p}_n| \geq \varepsilon - \eta = \eta.$$

Autrement dit, en termes d'événements de la tribu $\mathcal{A}$,

$$\forall n \geq n_0, \quad [|Y_n - p| \geq \varepsilon] \subset [|Y_n - \bar{p}_n| \geq \eta]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \mathbf{P}(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|Y_n - \bar{p}_n| \geq \eta).$$

► Comme $\eta > 0$, on déduit de la première question que le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Solution 81

rms132-1190

1. Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(Z) = 1/p$ et $\mathbf{V}(Z) = q/p^2$.

♣ Comme X et Y ont même loi et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 = 1 + 2\mathbf{E}(X)$$

et donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{2p} = \frac{q}{2p}.$$

♣ Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\mathbf{V}(X)$$

et donc $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$.

2. a. Comme Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Or $Z = X + Y + 1$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_Z(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X \cdot t^Y \cdot t^1) = \mathbf{E}(t^X) \cdot \mathbf{E}(t^Y) \cdot t = t[G_X(t)]^2.$$

Or $G_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ (somme de termes positifs), donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}.$$

2. b. On sait que

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots [-(2k-1)/2]}{k!} u^k.$$

Par conséquent, avec $u = -qt$ (où $0 < q < 1$),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{p} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \cdot \frac{q^k}{4^k} \cdot t^k \right].$$

Comme le rayon de convergence d'une série génératrice est au moins égal à 1, on peut identifier les coefficients terme à terme. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\sqrt{p} q^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

Solution 82

rms132-1191

1. Pour $|t^2/2| < 1$,

$$\frac{t}{2-t^2} = \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1-(t^2/2)} = \frac{t}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

et pour $|t^2/2| > 1$, la série (géométrique) est grossièrement divergente.

Par conséquent, le rayon de convergence est égal à $1/\sqrt{2}$.

2. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier terme à terme. Puisque

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^{2n+1},$$

alors

- si k est pair, alors $\mathbf{P}(X = k) = 0$ — autrement dit, X est une variable aléatoire dont les valeurs sont presque sûrement des entiers impairs;
- si k est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n + 1$ et

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

3. Comme le rayon de convergence de la série génératrice est *strictement* supérieur à 1, la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre. En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = f'(1).$$

Or

$$\forall t \in [0, 1/\sqrt{2}], \quad f'(t) = \frac{1}{2-t^2} + \frac{2t^2}{2-t^2}$$

et donc $f'(1) = 3$.

4. Comme les valeurs de X sont des entiers impairs, Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des demi-entiers :

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{E} = \left\{ \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[Y = \frac{2n+1}{2} \right] = [X = 2n+1],$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\left(Y = \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Solution 83

rms132-1192

1. Ultra-classique :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

pour tout entier $1 \leq k \leq n$.

🔗 On rappelle une autre formule ultra-classique, conséquence de la formule du binôme :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. Comme $([X = k])_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, il faut que

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

D'après la relation précédente (avec un décalage d'indices),

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

puisqu'il manque un terme ($\ell = 0$) pour la formule du binôme. Ainsi,

$$\alpha = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}.$$

3. Comme X est une variable aléatoire bornée, elle admet des moments de tout ordre et en particulier, c'est une variable d'espérance finie et de variance finie.

On part de la définition de la variance et on recourt à l'Astuce taupinale :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)-1}{k+1} \binom{n}{k} = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{a}{k+1} \binom{n}{k} = 2^n a - 1.$$

Après simplification,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}.$$

4. Nous allons calculer la variance de manière indirecte : la question précédente nous indique qu'il faut utiliser l'Astuce taupinale pour réussir à calculer ces sommes. Après quelque réflexion, on devine qu'il faut commencer le calcul de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X(X+1)] &= \sum_{k=0}^n k(k+1) \mathbf{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{k+1} \binom{n}{k} = a \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= a \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = na \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = 2^{n-1} na \end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X(X+1)] - \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2$$

et après quelques simplifications, on arrive à

$$\mathbf{V}(X) = 2^{n-1}(n+2)a - 4^n a^2 = \frac{2^{n-1}(n+1)(n+2)}{2^{n+1}-1} - \left(\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1} \right)^2.$$

Exercice purement calculatoire, sans contenu mathématique identifié — à l'ancienne ! Quelques lignes de Python permettent de vérifier l'exactitude des expressions trouvées.

Solution 84

rms132-1235

1. Comme X est, par hypothèse, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [X = n] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 2k] \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 3k]$$

sont deux événements (= des éléments de la tribu $\mathcal{A}$).

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = p(1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}, \\ \mathbf{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} = p(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}. \end{aligned}$$

2. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, X est simultanément multiple de 2 et multiple de 3 si, et seulement si, X est multiple de 6 :

$$A \cap B = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = 6k]$$

et, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 6k) = p(1-p)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^6}.$$

Or

$$1 - q^6 = (1 - q^3)(1 + q^3) = (1 - q^3)(1 + q)(1 - q + q^2).$$

✎ C'est toujours utile de bien connaître les racines sixièmes de l'unité...

Donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{(1-p)^5}{(3-3p+p^2)(2-p)(1-p+p^2)} = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) \cdot \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}.$$

Comme $(1-p)^2 = 1-2p+p^2 \neq 1-p+p^2$ pour tout $p \in]0, 1[$, on en déduit que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ et donc que ces deux événements ne sont pas indépendants.

Solution 85

rms133-204

✎ Il n'est pas vraiment nécessaire ici de connaître la **fonction de répartition** F de la variable aléatoire X , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

mais ça peut donner des pistes...

Il est donc utile de savoir que la fonction F est croissante, qu'elle tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et vers 1 au voisinage de $+\infty$ et qu'elle est continue à droite en tout point avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(x^-) + \mathbf{P}(X = x).$$

1. Notons $x_1 < \dots < x_n$, les points du support de X :

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = x_k) = 1 \quad \text{avec} \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(X = x_k) > 0.$$

✎ Quelques propriétés de la fonction de répartition pour éclairer la discussion qui va suivre.

• Si μ est un point du support, alors il existe $1 \leq r \leq n$ tel que $\mu = x_r$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq \mu) &= \mathbf{P}(X \in]-\infty, x_r]) = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k), \\ \mathbf{P}(X \geq \mu) &= \mathbf{P}(X \in [x_r, +\infty[) = \sum_{k=r}^n \mathbf{P}(X = x_k). \end{aligned}$$

• Sinon, il existe un entier $0 \leq r \leq n+1$ tel que $x_r < \mu < x_{r+1}$ (en convenant que $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$). Dans ce cas, $\mathbf{P}(x_r < X < x_{r+1}) = 0$, donc $\mathbf{P}(X \in]x_r, \mu]) = \mathbf{P}(X \in [\mu, x_{r+1}[) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq \mu) &= \mathbf{P}(X \in]-\infty, x_r] \cup]x_r, \mu]) = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k), \\ \mathbf{P}(X \geq \mu) &= \mathbf{P}(X \in [\mu, x_{r+1}[\cup [x_{r+1}, +\infty[) = \sum_{k=r+1}^n \mathbf{P}(X = x_k). \end{aligned}$$

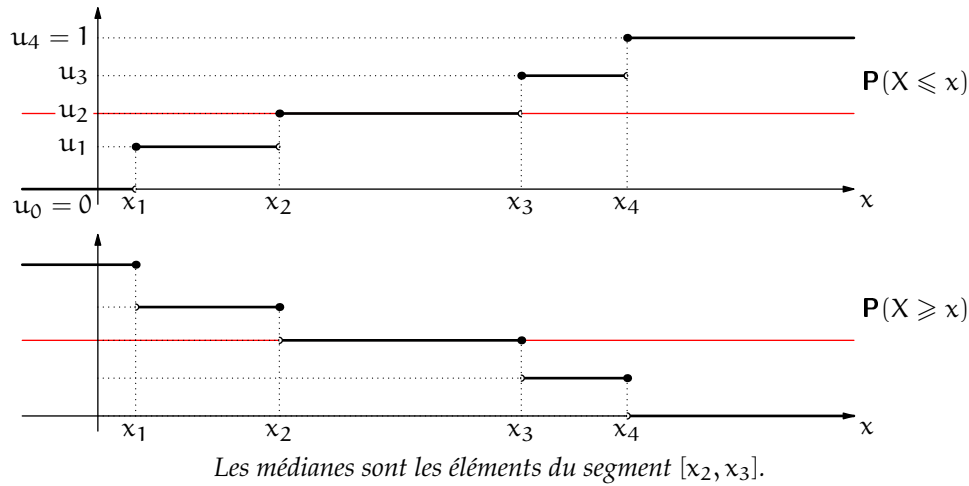
• On considère les réels $(u_r)_{0 \leq r \leq n+1}$ définis par

$$\begin{aligned} u_r &= \mathbf{P}(X \leq x_r) = 1 - \mathbf{P}(X > x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \geq x_{r+1}) \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k) = 1 - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{P}(X = x_k) \end{aligned}$$

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1$ par convention. Par définition du support, la famille $(u_r)_{0 \leq r \leq n+1}$ est strictement croissante.

• **Premier cas :** il existe un (unique!) entier $1 \leq r \leq n$ tel que

$$u_r = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$



► Pour $x < x_r$, on a $[X \leq x] \subset [X < x_r] = [X \leq x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X < x_r]$ et donc

$$\forall x < x_r, \quad \mathbf{P}(X \leq x) \leq \mathbf{P}(X < x_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(X = x_r) < \frac{1}{2}$$

puisque $\mathbf{P}(X = x_r) > 0$ (car x_r est dans le support de la loi de X).

► Pour $x \geq x_r$, on a $[X \leq x_r] \subset [X \leq x]$, donc

$$\forall x \geq x_r, \quad \mathbf{P}(X \leq x) \geq \mathbf{P}(X \leq x_r) = \sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$

► Pour $x \leq x_{r+1}$, on a $[X \geq x_{r+1}] \subset [X \geq x]$, donc

$$\forall x \leq x_{r+1}, \quad \mathbf{P}(X \geq x) \geq \mathbf{P}(X \geq x_{r+1}) = \sum_{k=r+1}^n \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2}.$$

► Enfin, pour $x > x_{r+1}$, on a $[X \geq x] \subset [X > x_{r+1}] = [x_{r+1} < X < x_{r+2}] \sqcup [x_{r+2} \leq X]$, donc

$$\mathbf{P}(X \geq x) \leq \mathbf{P}(X > x_{r+1}) = \sum_{k=r+2}^n \mathbf{P}(X = x_k) = \frac{1}{2} - \mathbf{P}(X = x_{r+1}) < \frac{1}{2}$$

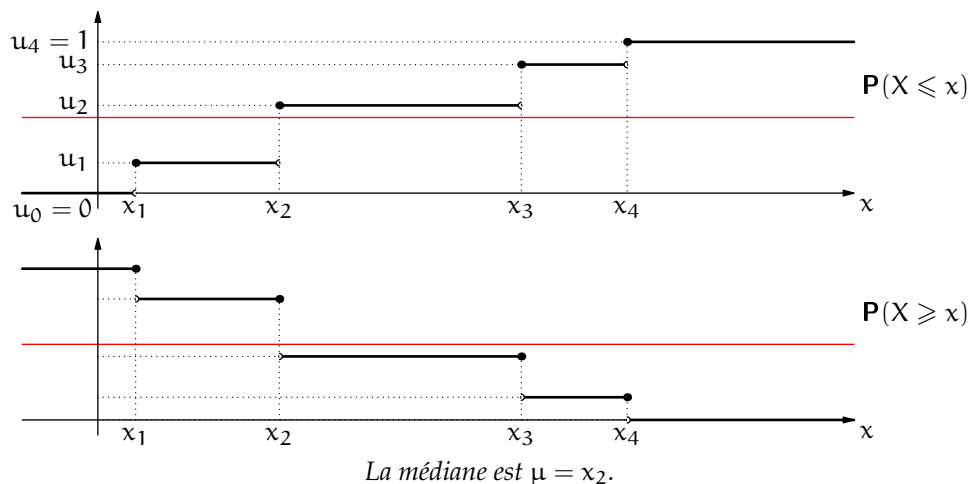
car x_{r+1} est dans le support de la loi de X .

Dans ce cas,

- si $x < x_r$, alors $\mathbf{P}(X \leq x) < 1/2$;
- tout réel $\mu \in [x_r, x_{r+1}]$ vérifie les deux contraintes $\mathbf{P}(X \leq \mu) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(X \geq \mu) \geq 1/2$ simultanément;
- si $x > x_{r+1}$, alors $\mathbf{P}(X \geq x) < 1/2$.

L'ensemble des médianes de X est alors le segment $[x_r, x_{r+1}]$.

• **Deuxième cas :** aucun u_r n'est égal à $1/2$.



Dans ce cas, il existe un, et un seul, entier $1 \leq r \leq n$ tel que

$$u_{r-1} < \frac{1}{2} < u_r = u_{r-1} + \mathbf{P}(X = x_r).$$

► Pour $x < x_r$,

— ou bien $x \leq x_{r-1}$ et $[X \leq x] \subset [X \leq x_{r-1}]$;

— ou bien $x_{r-1} < x < x_r$ et alors $[X \leq x] = [X \leq x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X \leq x]$, avec $[x_{r-1} < X \leq x] \subset [x_{r-1} < X < x_r]$.

Dans les deux situations,

$$\forall x < x_r, \quad \mathbf{P}(X \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq x_{r-1}) = u_{r-1} < 1/2.$$

► Pour $x \geq x_r$, on a $[X \leq x_r] \subset [X \leq x]$, donc

$$\forall x \geq x_r, \quad \mathbf{P}(X \leq x) \geq \mathbf{P}(X \leq x_r) = u_r > 1/2.$$

► Pour $x \leq x_r$, on a $[X < x_r]^c = [X \geq x_r] \subset [X \geq x]$ et $[X < x_r] = [X \leq x_{r-1}] \sqcup [x_{r-1} < X < x_r]$, donc

$$\forall x \leq x_r, \quad \mathbf{P}(X \geq x) \geq \mathbf{P}(X \geq x_r) = 1 - \mathbf{P}(X < x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \leq x_{r-1}) = 1 - u_{r-1} > 1/2.$$

► Enfin, pour $x > x_r$, on a $[X \geq x] \subset [X > x_r] = [X \leq x_r]^c$, donc

$$\forall x > x_r, \quad \mathbf{P}(X \geq x) \leq \mathbf{P}(X > x_r) = 1 - \mathbf{P}(X \leq x_r) = 1 - u_r < 1/2.$$

Dans ce deuxième cas,

— la contrainte $\mathbf{P}(X \leq \mu) \geq 1/2$ est vérifiée si, et seulement si, $\mu \geq x_r$

— et la contrainte $\mathbf{P}(X \geq \mu) \geq 1/2$ est vérifiée si, et seulement si, $\mu \leq x_r$.

La loi de X admet donc une, et une seule médiane : $\mu = x_r$.

✎ On donnera une autre démonstration à la fin de l'exercice.

2. Comme le support de X est fini, la variable aléatoire X est bornée et admet des moments de tout ordre.

Notons $m = \mathbf{E}(X)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(X - t)^2 = (X - m)^2 + 2(m - t)(X - m) + (m - t)^2.$$

Les trois termes du second membre sont des variables aléatoires d'espérance finie (elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs par hypothèse), donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(X - t)^2] &= \mathbf{V}(X) + 2(m - t)\mathbf{E}(X - m) + (m - t)^2 \\ &= \mathbf{V}(X) + (m - t)^2 \end{aligned}$$

puisque $m = \mathbf{E}(X)$.

On en déduit que l'espérance $\mathbf{E}[(X - t)^2]$ est minimale si, et seulement si, $t = \mathbf{E}(X)$ et son minimum est égal à $\mathbf{V}(X)$.

✎ La démonstration qu'on a donnée vaut pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre deux !

3. D'après la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \mathbf{E}[|X - t|] = \sum_{k=1}^n |x_k - t| \mathbf{P}(X = x_k).$$

On étudie donc ici une fonction g continue et affine par morceaux. Plus précisément, cette fonction est affine sur les intervalles

$$]x_0, x_1[=]-\infty, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_r, x_{r+1}[, \dots,]x_{n-1}, x_n[,]x_n, x_{n+1}[=]x_n, +\infty[.$$

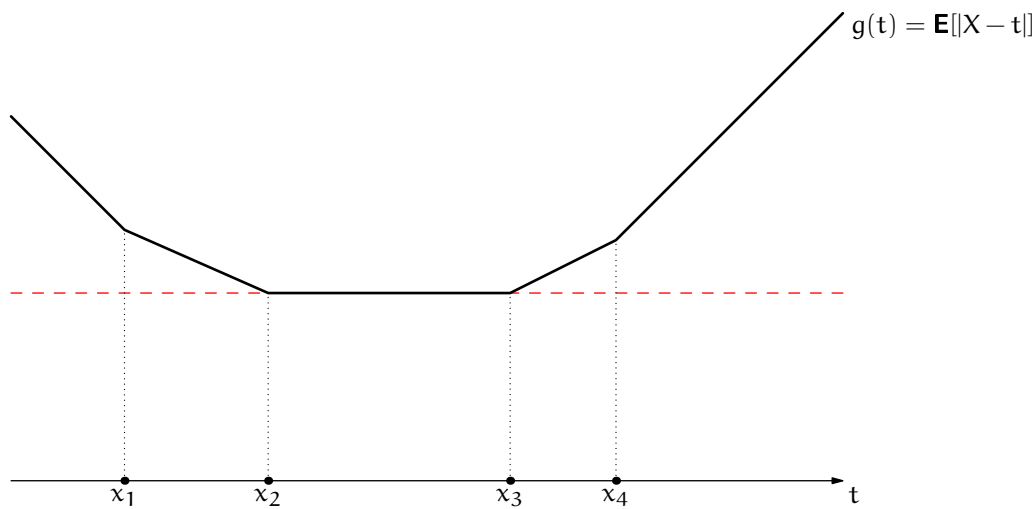
Pour $t \in]x_r, x_{r+1}[$, on a $x_r < t < x_{r+1}$ et donc

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=1}^r \underbrace{(t - x_k)}_{>0} \mathbf{P}(X = x_k) + \sum_{k=r+1}^n \underbrace{(x_k - t)}_{>0} \mathbf{P}(X = x_k) \\ &= \left[\sum_{k=1}^r \mathbf{P}(X = x_k) - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{P}(X = x_k) \right] \cdot t + C^{te} \\ &= [u_r - (1 - u_r)]t + C^{te} = (2u_r - 1)t + C^{te}. \end{aligned}$$

On peut alors reprendre la discussion précédente sur la médiane.

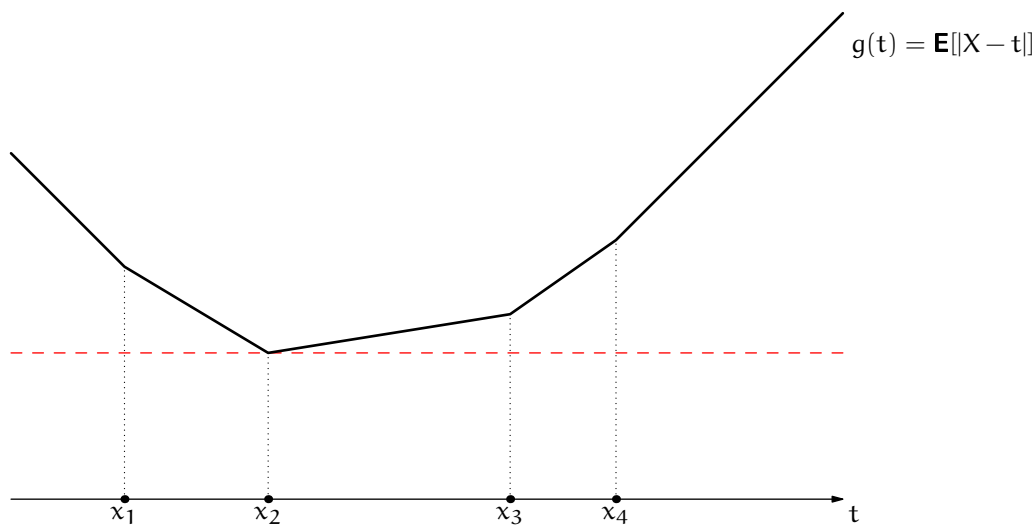
✎ S'il existe un entier r_0 tel que $u_{r_0} = 1/2$, alors

- pour $r < r_0$, la pente $(2u_r - 1) < 2u_{r_0} - 1 = 0$ est strictement négative et la fonction g est strictement décroissante sur $]x_r, x_{r+1}[$;
- pour $r = r_0$, la pente $(2u_{r_0} - 1)$ est nulle et la fonction g est constante sur l'intervalle ouvert $]x_{r_0}, x_{r_0+1}[$ et donc sur le segment $[x_{r_0}, x_{r_0+1}]$ (puisque'elle est *continue* sur ce segment);
- pour $r > r_0$, la pente $(2u_r - 1) > 2u_{r_0} - 1 = 0$ est strictement positive et la fonction g est strictement croissante sur $]x_r, x_{r+1}[$.



Dans ce cas, la fonction g est donc minimale sur le segment $[x_{r_0}, x_{r_0+1}]$, qui est l'ensemble des médianes de X .

- Si $u_r \neq 1/2$ pour tout entier r , alors il existe un, et un seul, entier r_0 tel que la médiane μ soit égale à x_{r_0} et
 - pour $r < r_0$, la pente $(2u_r - 1) < (2u_{r_0} - 1) < 0$ est strictement négative et la fonction g est strictement décroissante sur $]x_r, x_{r+1}[$;
 - pour $r \geq r_0$, la pente $(2u_r - 1) \geq (2u_{r_0} - 1) > 0$ est strictement positive et la fonction g est strictement croissante sur $]x_r, x_{r+1}[$.



Dans ce cas, la fonction g atteint son minimum en $t = x_{r_0} = \mu$ uniquement.

- Dans tous les cas, l'espérance $E[|X - t|]$ est minimale si, et seulement si, le réel t est une médiane de X .

Solution 86

rms133-205

1.

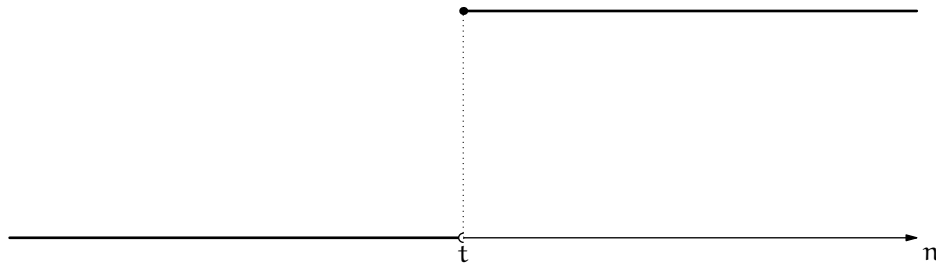
▮ Pour toute fonction bornée $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, la variable aléatoire $h(X)$ est bornée, donc d'espérance finie.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction

$$h_t = [n \mapsto \mathbb{1}_{[n \geq t]}]$$

est une fonction croissante et bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$E[h_t(X)] = P(X \leq t).$$



• Réciproquement, supposons que X soit stochastiquement inférieure à Y et considérons une fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et bornée.

D'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) [\mathbf{P}(X \geq n) - \mathbf{P}(X \geq n+1)].$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N h(n) [\mathbf{P}(X \geq n) - \mathbf{P}(X \geq n+1)] &= \sum_{n=0}^N h(n) \mathbf{P}(X \geq n) - \sum_{n=1}^{N+1} h(n-1) \mathbf{P}(X \geq n) \\ &= h(0) + h(N) \mathbf{P}(X \geq N) + \sum_{n=1}^N [h(n) - h(n-1)] \mathbf{P}(X \geq n). \end{aligned}$$

On aura reconnu la transformation d'Abel.

La fonction h est bornée et on sait que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X \geq N) = 0,$$

donc $h(N) \mathbf{P}(X \geq N)$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\mathbf{E}[h(X)] = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [h(n) - h(n-1)] \mathbf{P}(X \geq n).$$

Cette égalité est vraie pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est donc vraie aussi pour Y .

Mais $[h(n) - h(n-1)] \geq 0$ (puisque h est croissante) et $\mathbf{P}(X \geq n) \leq \mathbf{P}(Y \geq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\mathbf{E}[h(X)] \leq h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [h(n) - h(n-1)] \mathbf{P}(Y \geq n) = \mathbf{E}[h(Y)].$$

2. On conditionne par X au moyen du système complet d'événements $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}_{[X=m]}(Y \geq m)$$

et par indépendance des variables aléatoires :

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(Y \geq m).$$

Comme X est stochastiquement inférieure à Y , on en déduit que

$$\mathbf{P}(X \leq Y) \geq \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X \geq m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n).$$

• Comme la famille de terme général $\mathbf{P}(X = k)$ est sommable (propriété de σ -additivité), la famille

$$(\mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n))_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \quad (9)$$

est sommable et la sous-famille

$$(\mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n))_{0 \leq m \leq n} \quad (10)$$

est sommable elle aussi. D'après le Théorème de Fubini appliqué à la famille (9),

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \right) = 1 \quad (11)$$

et d'après le Théorème de Fubini appliqué à la sous-famille (10),

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n)$$

et donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^m \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n). \quad (12)$$

✎ Dans cette dernière transformation, il s'agit seulement de changer d'indices (on intervertit les rôles de m et n), ce n'est pas une interversion de sommes.

Notons S , cette somme. On a démontré que

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^m \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) && \text{avec (12)} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\mathbf{P}(X = m)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(X = n) \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2. && \text{avec (11)} \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs et ils ne sont pas tous nuls (puisque le support de la loi de X est contenu dans $\mathbb{N}$). En particulier, $2S > 1$, donc $S > 1/2$.

✎ Pour obtenir la minoration $S > a$, il faudrait que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 > 2a - 1 > 0$$

pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. C'est impossible! On peut considérer la variable aléatoire X de loi uniforme sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ pour s'en convaincre :

$$\forall 0 \leq n \leq N, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{N+1}, \quad \forall n > N, \quad \mathbf{P}(X = n) = 0$$

donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m)^2 = \frac{1}{N+1}.$$

L'expression $2S - 1$, strictement positive pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, ne peut donc être minorée par une constante strictement positive indépendante de X .

Solution 87

rms133-206

Comme les variables aléatoires X_k sont strictement positives, il est clair que $0 < Y_{m,n}(\omega) \leq 1$ pour tout $\omega \in \Omega$. Par conséquent, toutes ces variables aléatoires sont d'espérance finie.

✎ Toute variable aléatoire bornée est d'espérance finie.

✎ Comme les variables aléatoires X_k , $1 \leq k \leq n$, sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

ont même loi, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par conséquent, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les variables aléatoires

$$Y_{1,n} = \frac{X_1}{X_1 + \cdots + X_n} \quad \text{et} \quad \frac{X_{\sigma(1)}}{X_{\sigma(1)} + \cdots + X_{\sigma(n)}} = \frac{X_{\sigma(1)}}{X_1 + \cdots + X_n}$$

ont même loi.

✎ Si deux vecteurs aléatoires $(U_1, \dots, U_n)$ et $(V_1, \dots, V_n)$ ont même loi, alors les variables aléatoires

$$f(U_1, \dots, U_n) \quad \text{et} \quad f(V_1, \dots, V_n)$$

ont même loi, quelle que soit la fonction f .

Il est essentiel de se rappeler cette propriété quand on travaille avec un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi, puisqu'il s'agit d'un vecteur aléatoire **invariant par symétrie**.

Ainsi, la variable aléatoire

$$Y_{m,n} = \sum_{k=1}^m \frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}$$

est la somme de m variables aléatoires d'espérance finie, de même loi que $Y_{1,n}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_{m,n}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{E}\left(\frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = m \mathbf{E}(Y_{1,n}).$$

✎ En particulier, la variable aléatoire $Y_{n,n}$, qui est constamment égale à 1, est la somme de n variables aléatoires de même loi que $Y_{1,n}$:

$$Y_{n,n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1 + \cdots + X_n} = 1 = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{X_1 + \cdots + X_n}.$$

Par conséquent, $1 = \mathbf{E}(Y_{n,n}) = n \mathbf{E}(Y_{1,n})$ et finalement

$$\forall 1 \leq m \leq n, \quad \mathbf{E}(Y_{m,n}) = \frac{m}{n}.$$

Solution 88

rms134-1378

La fonction S_n est bien une variable aléatoire en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires. Comme une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire d'espérance finie, la variable aléatoire S_n est aussi un variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) + \mathbf{E}(X_{k+1}) = \sum_{k=1}^n 2p = 2np.$$

✎ On peut aussi écrire

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=2}^{n+1} X_k = X_1 + X_{n+1} + \sum_{k=2}^n X_k.$$

Comme les variables aléatoires X_k sont bornées, elles admettent toutes un moment d'ordre deux et comme elles sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}(X_1) + \sum_{k=2}^n \mathbf{V}(2X_k) + \mathbf{V}(X_{n+1}) = [4(n-1) + 2] \mathbf{V}(X) = (4n-2)p(1-p).$$

✎ La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances. Lorsque les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, la formule se complique avec l'apparition des covariances qui ne sont plus nécessairement nulles :

$$\mathbf{V}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell).$$

Avec $Y_k = X_k + X_{k+1}$ et $Y_\ell = X_\ell + X_{\ell+1}$, on a

- $\mathbf{Cov}(Y_k, Y_\ell) = 0$ pour $k < \ell - 1$ d'après le lemme des coalitions (puisque les paires d'indices $\{k, k+1\}$ et $\{\ell, \ell+1\}$ sont alors disjointes);
- et pour $k = \ell - 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) &= \mathbf{Cov}(X_k + X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2}) \\ &= \mathbf{Cov}(X_k, X_{k+1} + X_{k+2}) + \mathbf{V}(X_{k+1}) + \mathbf{Cov}(X_{k+1}, X_{k+2}) = \mathbf{V}(X_{k+1}) = p(1-p) \end{aligned}$$

à nouveau par le lemme des coalitions.

Solution 89

rms134-1531

✎ Nous allons commencer par traiter ces deux questions dans un même cadre général, avant de passer aux applications numériques.

On modélise la situation décrite par l'énoncé de la manière suivante :

— il existe trois variables aléatoires N , X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui vérifient la relation suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) + Y(\omega) = N(\omega);$$

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

✎ Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait qu'on reconnaît ici un schéma de Bernoulli et que X représente, d'une certaine manière, le nombre de succès lors d'une succession de n tentatives (et Y représente alors le nombre d'échecs).

♣ On en déduit avant toute chose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(Y = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(N - X = k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k, N = n) \\ &= \mathbf{P}(X = n - k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)} \mathbf{P}(N = n) && \text{(pour } 0 \leq n - k \leq n) \\ &= \binom{n}{k} q^k p^{n-k} \mathbf{P}(N = n) && \text{(soit } 0 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

1. On suppose pour commencer que la variable aléatoire N est presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}(N = n) = 1.$$

Dans ces conditions, l'évènement $[N \neq n]$ est négligeable et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(X = k, N = n) + \mathbf{P}(X = k, N \neq n) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(X = k \mid N = n). \end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

De même, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

♣ Comme N est presque sûrement constante, elle est indépendante de X . (Voir ci-dessous en cas de doute.) Comme $Y = N - X$ et que la covariance est linéaire à droite,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(X, N) - \mathbf{V}(X) = 0 - \mathbf{V}(X) = -npq < 0.$$

Comme la covariance de X et Y n'est pas nulle, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

✎ Comme $\mathbf{P}(N = n) = 1$, on a aussi $\mathbf{P}(N = k) = 0$ pour tout entier $k \neq n$.

Pour $k \neq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a donc

$$0 \leq \mathbf{P}(X = \ell, N = k) \leq \mathbf{P}(N = k) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = k) = 0 = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = k).$$

Pour $k = n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a aussi (voir plus haut)

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = n) = \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{P}(X = \ell) \mathbf{P}(N = n).$$

Ces calculs prouvent que X et N sont indépendantes.

2. On suppose maintenant que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} \end{aligned}$$

et comme $-1 + q = -p$, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

De même, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$.

En particulier, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

• Quels que soient les entiers k et ℓ , d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N - X = \ell, N = n) && \text{(puisque } X + Y = N) \\ &= \mathbf{P}(X = k, N = k + \ell) && \text{(contrainte } n = k + \ell) \\ &= \mathbf{P}(X = k \mid N = k + \ell) \mathbf{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k + \ell}{k} p^k q^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k + \ell)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\ &= \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = \ell). \end{aligned}$$

Cela prouve bien que X et Y sont indépendantes.

En particulier, cette fois, la covariance de X et Y est nulle.

Solution 90

rms134-1536

1. Par définition, la i -ième tulipe fleurit à partir de l'année X_i . Donc toutes les tulipes fleurissent l'année k si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad k \geq X_i,$$

c'est-à-dire (passage au maximum) si

$$k \geq \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

On en déduit que l'année X de la première floraison générale est donnée par

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

2. Comme on l'a vu plus haut, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[X \leq k] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [X_i \leq k].$$

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq k)$$

et comme elles suivent toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X \leq k) = \mathbf{P}(X_1 \leq k)^n = (1 - q^k)^n$$

avec $q = 1 - p \in]0, 1[$ (comme d'habitude).

• On en déduit, par passage au complémentaire et par la formule du binôme, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X > k) = 1 - (1 - q^k)^n = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \binom{n}{\ell} q^{k\ell}.$$

Le terme général de la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est donc une combinaison linéaire de séries géométriques convergentes (de raisons respectives $q, q^2, \dots, q^n$ avec $0 < q < 1$). Par conséquent, la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente, donc X est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \binom{\ell}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} (q^\ell)^k = \sum_{\ell=1}^n \binom{\ell}{n} \frac{(-1)^{\ell+1}}{1 - q^\ell}.$$

Il s'agit ici d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de séries convergentes, donc la linéarité de la somme suffit pour justifier l'interversion des deux symboles $\sum$. Le théorème de Fubini est hors sujet!

Solution 91

rms134-1539

Pour une fois, $q \neq 1 - p$... Méfiance!

1. Comme la variable aléatoire Y suit une loi géométrique, elle est toujours supérieure à 1, donc $Z \leq X$.

Comme la variable aléatoire Z est positive, on en déduit que $Z^2 \leq X^2$.

La variable aléatoire X , de loi géométrique, admet des moments de tout ordre. Par comparaison, les variables aléatoires Z et Z^2 sont donc d'espérance finie. Donc Z admet une espérance et une variance.

La variable aléatoire $1/Y$ est bien définie (puisque le dénominateur Y ne s'annule jamais) et d'espérance finie (puisque elle est presque sûrement bornée : $\mathbf{P}(0 \leq Y \leq 1) = 1$).

Ainsi, la variable aléatoire $Z = X \times 1/Y$ apparaît comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

D'après le cours, $\mathbf{E}(X) = 1/p$ et d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = \frac{-p \ln(1 - q)}{q} = \frac{-p \ln p}{q}.$$

Le rayon de convergence du développement en série entière de $\ln(1 - x)$ est égal à 1 et $0 < q < 1$.

Finalement,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{-\ln p}{q}.$$

2. Les valeurs de Z appartiennent à $\mathbb{Q}_+^*$. Pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un unique couple $(n, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$r = \frac{n}{d} \quad \text{avec} \quad n \wedge d = 1$$

(représentation irréductible de r). Dans ces conditions,

$$Z(\omega) = r \iff \exists a \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} X(\omega) = an \\ Y(\omega) = ad \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[Z = r] = \bigsqcup_{a \in \mathbb{N}^*} [X = an] \cap [Y = ad].$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$ et indépendance des variables aléatoires X et Y , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n/d) &= \sum_{a=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = an) \mathbf{P}(Y = ad) = \sum_{a=1}^{+\infty} p(1-p)^{an-1} \cdot q(1-q)^{ad-1} \\ &= \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \cdot \frac{(1-p)^n}{1 - (1-p)^n} \cdot \frac{(1-q)^d}{1 - (1-q)^d}. \end{aligned}$$

Solution 92**rms134-1543**

1. Il est clair que les valeurs de C_n sont comprises entre 1 (cas où toutes les variables aléatoires X_k prennent la même valeur) et n (cas où toutes les variables aléatoires X_k prennent des valeurs distinctes).

L'ensemble $\mathbb{N}^n$ est dénombrable (produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables) et

$$\mathbb{N}^n = \bigsqcup_{1 \leq k \leq n} E_k$$

où E_k est l'ensemble des n -uplets formés au moyen de k entiers naturels distincts.

Les ensembles E_k sont donc des ensembles dénombrables (ils sont contenus dans un ensemble dénombrable et manifestement ils sont infinis) et, pour tout entier $1 \leq k \leq n$,

$$C_n(\omega) = k \iff \exists (i_1, \dots, i_n) \in E_k, \quad (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = (i_1, \dots, i_n).$$

Autrement dit,

$$[C_n = k] = \bigsqcup_{(i_1, \dots, i_n) \in E_k} [X_1 = i_1] \cap \dots \cap [X_n = i_n]$$

ce qui prouve que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad [C_n = k] \in \mathcal{A}$$

et donc que C_n est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

• Comme C_n est une variable aléatoire bornée, elle est d'espérance finie.

✎ Plus précisément, $1 \leq \mathbf{E}(C_n) \leq n$, ce qui donne de l'intérêt aux estimations qui vont suivre.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. De deux choses l'une :

- ou bien toutes les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont strictement inférieures à k et dans ce cas, elles ne peuvent pas prendre plus de k valeurs distinctes ;
- ou bien l'une d'elles au moins est supérieure à k .

Autrement dit :

$$\Omega = [X_1 < k, \dots, X_n < k] \sqcup ([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k])$$

et

$$[X_1 < k, \dots, X_n < k] \subset [C_n \leq k].$$

Comme $C_n(\omega) \leq n$ pour tout $\omega \in \Omega$, on en déduit que

$$C_n \leq k \mathbb{1}_{[X_1 < k, \dots, X_n < k]} + n \mathbb{1}_{[X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]}.$$

Comme l'espérance conserve les inégalités, on en déduit que

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k \mathbf{P}([X_1 < k, \dots, X_n < k]) + n \mathbf{P}([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]).$$

Les variables aléatoires X_k sont de même loi, donc

$$\mathbf{P}([X_1 \geq k] \cup \dots \cup [X_n \geq k]) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \geq k) = n \mathbf{P}(X_1 \geq k)$$

et finalement

$$\mathbf{E}(C_n) \leq k \times 1 + n \times n \mathbf{P}(X_1 \geq k) = k + n^2 \mathbf{P}(X_1 \geq k).$$

✎ Il n'y a plus de calcul de probabilité dans ce qui suit, c'est un résultat d'analyse. Nous considérerons donc deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq u_n \leq k + n^2 \frac{\varepsilon_k}{k} \quad \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0.$$

et nous cherchons à en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

3. Fixons $0 < \eta < 1$ et posons $\varepsilon = \sqrt{\eta} \in]0, 1[$.

D'après les hypothèses,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{n} + n \frac{\varepsilon_k}{k}$$

et, comme $\eta > 0$, il existe un entier $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq K_0, \quad 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\forall n > K_0, \forall K_0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{n} + n \frac{\varepsilon}{k}. \quad (*)$$

➤ Le principe du raisonnement qui va suivre est classique : c'est un passage à la borne inférieure. Si

$$\forall x \in [a, b], \quad g(n) \leq f(x)$$

alors

$$g(n) \leq \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

La mise en œuvre de ce raisonnement est (un peu) compliquée par le fait que, ici, le majorant est une fonction de la variable entière k et non pas une fonction de la variable réelle x .

• Une étude rapide montre que la fonction f définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n\varepsilon}{x}$$

atteint son minimum en $x_0 = n\sqrt{\varepsilon}$. Comme $0 < \varepsilon < 1$, on a $n\sqrt{\varepsilon} < n$ pour tout n et la suite de terme général $y_n = n\sqrt{\varepsilon}$ tend vers $+\infty$, donc il existe donc un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad K_0 \leq k_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor \leq n.$$

➤ À défaut de pouvoir majorer par le minimum de la fonction f , on va majorer par une valeur particulière de f qui est assez proche du minimum de f .

On déduit donc de (*) que

$$\begin{aligned} \forall n > \max\{K_0, N_1\}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} &\leq f(k_0) = \frac{\lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor}{n} + n \frac{\varepsilon}{\lfloor n\sqrt{\varepsilon} \rfloor} \\ &\leq \frac{n\sqrt{\varepsilon} + 1}{n} + n \frac{\varepsilon}{n\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{1}{n} + 2\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $1/n$ tend vers 0, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{n} \leq \eta.$$

Finalement, en posant $N_0 = \min\{K_0, N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$,

$$\forall n > N_0, \quad 0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 3\eta$$

et nous avons bien démontré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Solution 93

rms135-1492

Chaque tirage nous donne trois entiers i, j et k tels que

$$1 \leq i < j < k \leq n.$$

➤ Un tirage simultané de trois boules revient à tirer trois boules successivement et sans remise. Les numéros des boules tirées sont donc deux à deux distincts.

En particulier, puisque i, j et k sont des entiers, on a $k \leq n$, donc $j \leq k - 1 \leq n - 1$ et $i \leq j - 1 \leq n - 2$. A priori, la valeur de X est majorée par $n - 2$.

Réciproquement, le tirage $(i, i + 1, i + 2)$ est possible pour tout entier $1 \leq i \leq n - 2$, donc les valeurs possibles de X sont exactement les entiers $i \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$.

• Notons E , l'ensemble des parties de trois éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. C'est un ensemble fini dont le cardinal est, par définition, égal à $\binom{n}{3}$.

• Tirer trois boules simultanément parmi n boules numérotées de 1 à n revient à considérer une partie de trois éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Dans l'énoncé, rien ne s'oppose à ce qu'on considère la mesure de probabilité uniforme sur E . Il existe donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète T définie sur cet espace tels que

$$\forall A \in E, \quad \mathbf{P}(T = A) = \frac{1}{\binom{n}{3}}.$$

Selon ce modèle, $X = \min(T)$ est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\llbracket 1, n - 2 \rrbracket$.

• Si T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E , alors $f(T)$ est une variable aléatoire discrète, quelle que soit la fonction $f : E \rightarrow F$.

• Puisque la variable aléatoire T suit par hypothèse la loi uniforme sur E ,

$$\forall B \in \mathfrak{P}(E), \quad \mathbf{P}(T \in B) = \frac{\#(B)}{\#(E)} = \frac{\#(B)}{\binom{n}{3}}.$$

La loi de X est caractérisée par la famille

$$(\mathbf{P}(X = i))_{1 \leq i \leq n-2}$$

et nous allons la déterminer comme d'habitude en exprimant l'évènement $[X = i]$ au moyen du système complet d'évènements $([T = A])_{A \in E}$.

• Par construction, $X(\omega) = 1$ si, et seulement si, la partie $T(\omega)$ contient 1. Les parties $A \in E$ qui contiennent 1 sont constituées de 1 (évidemment!) et de deux autres entiers choisis parmi $2, \dots, n$. Il y a donc $\binom{n-1}{2}$ parties $A \in E$ qui contiennent 1 et par conséquent

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

• De même, par construction, $X(\omega) = 2$ si, et seulement si, la partie $T(\omega)$ contient 2 et ne contient pas 1. Les parties $A \in E$ qui contiennent 2 sans contenir 1 sont constituées de 2 (bien sûr!) et de deux autres entiers choisis parmi $3, \dots, n$ (c'est-à-dire parmi les autres entiers différents de 1). Il y a donc $\binom{n-2}{2}$ parties $A \in E$ qui contiennent 2 mais pas 1 et par conséquent

$$\mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

• Comme on l'a vu, l'évènement $[X = n]$ est impossible, donc $\mathbf{P}(X = n) = 0$.

• En continuant le même raisonnement, on trouve que

$$\forall 1 \leq k \leq n - 2, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

En particulier, on a ainsi démontré que

$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{3},$$

ce qui est une variante de la formule du triangle de Pascal.

Solution 94**rms135-1493**

1. Le client A_3 peut accéder à un guichet dès que l'un des deux autres clients, A_1 ou A_2 , est servi. Par conséquent, la durée d'attente Y pour A_3 est égale à $\min\{X_1, X_2\}$. Ainsi,

$$Y = \min\{X_1, X_2\}$$

est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

🔗 Comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires discrètes, toute fonction de X_1 et de X_2 est encore une variable aléatoire discrète.

♣ Comme X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il est clair que Y est aussi une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le minimum $Y(\omega)$ est supérieur à k si, et seulement si, les deux valeurs $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ sont elles aussi supérieures à k . Autrement dit,

$$[Y \geq k] = [X_1 \geq k] \cap [X_2 \geq k].$$

🔗 **Méthode à connaître !** Lorsqu'on cherche la loi du maximum (ou, comme ici, la loi du minimum) d'un nombre fini de variables aléatoires, il faut travailler avec la fonction de répartition.

Pour $Z = \max\{X_1, X_2\}$, on s'intéressera donc à l'évènement $[Z \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k]$.

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Y \geq k) = [\mathbf{P}(X_1 \geq k)]^2 = [q^{k-1}]^2.$$

🔗 On doit savoir que $\mathbf{P}(Y \geq k) = q^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il est facile de se souvenir de cette formule : la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sert à modéliser l'instant du premier succès dans un schéma de Bernoulli. L'évènement $[Y \geq k]$ signifie dans ce cadre que le premier succès arrive après la k -ième tentative, c'est-à-dire après (au moins) $(k-1)$ échecs.

On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad [X \geq k] = [X = k] \sqcup [X \geq k+1]$$

et on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Y \geq k) - \mathbf{P}(Y \geq k+1) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}.$$

Autrement dit, la loi de Y est la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - q^2)$.

2. Avant de quitter le guichet, le client A_3 a patienté dans la file d'attente (durée Y), puis a pris le temps d'être servi au guichet (durée X_3). Par conséquent,

$$Z = Y + X_3$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

🔗 On peut en déduire immédiatement l'espérance de Z , sans avoir à calculer sa loi. Voir plus bas.

♣ Comme X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires indépendantes, les variables aléatoires $Y = \min\{X_1, X_2\}$ et X_3 sont indépendantes (lemme des coalitions).

On décompose l'évènement $[Z = n]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X_3 :

$$[Z = n] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X_3 = k, Z = n] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X_3 = k, Y = n - k].$$

Par σ -additivité et indépendance, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = k) \mathbf{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_3 = k) \mathbf{P}(Y = n - k)$$

puisque les valeurs de Y sont supérieures à 1. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} \cdot (1 - q^2)(q^2)^{(n-k)-1} = p(1 - q^2) \sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k-3} \\ &= p(1 + q)q^{n-2}(1 - q^{n-1}). \end{aligned}$$

3. Comme $Z = Y + X_3$ et que Y et X_3 suivent des lois géométriques, la variable aléatoire Z est la somme de deux variables aléatoires d'espérance finie et, par linéarité,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X_3) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{1}{p} = \frac{2+q}{p(1+q)} = \frac{3-p}{p(2-p)}.$$

✎ On peut vérifier par le calcul que

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(Z=n), \quad \text{soit} \quad \frac{2+q}{p(1+q)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p(1+q)q^{n-2}(1-q^{n-1}).$$

C'est un peu long, mais c'est un calcul qu'on doit savoir faire en se rappelant que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Solution 95

rms135-1494

1. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi, les couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) ont même loi.

✎ Supposons que X_1 et X_2 soient des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable E . Alors les lois des couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) sont caractérisées respectivement par les deux familles

$$(\mathbf{P}(X_1 = u, X_2 = v))_{(u,v) \in E \times E} \quad \text{et} \quad (\mathbf{P}(X_2 = u, X_1 = v))_{(u,v) \in E \times E}.$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la même loi, alors

$$\forall (u, v) \in E \times E, \quad \mathbf{P}(X_1 = u, X_2 = v) = \mathbf{P}(X = u) \mathbf{P}(X = v) = \mathbf{P}(X_2 = u, X_1 = v)$$

donc les deux couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) ont même loi.

✎ Il faut adapter la démonstration pour des variables aléatoires qui ne sont pas discrètes, mais le résultat est encore vrai.

✎ Plus généralement, si $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors les vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ont même loi, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On en déduit que Y_1 et Y_2 ont même loi, puisque la somme $X_1(\omega) + X_2(\omega)$ ne s'annule pour aucune valeur de $\omega \in \Omega$ (elle est strictement positive par hypothèse) et que

$$Y_1 = f(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad Y_2 = f(X_2, X_1) \quad \text{avec} \quad f = \left[(u, v) \mapsto \frac{u}{u+v} \right].$$

✎ Si X et X' sont deux variables aléatoires de même loi à valeurs dans un espace E , alors $f(X)$ et $f(X')$ sont deux variables aléatoires de même loi, quelle que soit la fonction $f : E \rightarrow F$.

Dans le cas d'une loi discrète :

$$\forall v \in F, \quad \mathbf{P}(f(X) = v) = \mathbf{P}(X \in f^*({v})) = \mathbf{P}(X' \in f^*({v})) = \mathbf{P}(f(X') = v).$$

Le résultat est encore vrai dans le cas où la loi de probabilité n'est plus discrète.

2. Comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires strictement positives, il est clair que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 < \frac{X_1(\omega)}{X_1(\omega) + X_2(\omega)} = Y_1(\omega) < 1.$$

La variable aléatoire Y_1 est donc bornée (et pas seulement p.s. bornée), elle admet donc des moments de tout ordre.

✎ Comme Y_2 a même loi que Y_1 , la variable aléatoire Y_2 admet aussi des moments de tout ordre et, en particulier, les espérances $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$ existent toutes les deux et sont égales : $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2)$. Il est clair que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_1(\omega) + Y_2(\omega) = \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega)}{X_1(\omega) + X_2(\omega)} = 1.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$1 = \mathbf{E}(1) = \mathbf{E}(Y_1) + \mathbf{E}(Y_2) = 2\mathbf{E}(Y_1).$$

Ainsi, $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(Y_2) = 1/2$.

3. En développant la fraction, on obtient $T/U = Y_1 - Y_2$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on sait que Y_1 et Y_2 admettent un moment d'ordre p et on sait que l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui admettent un moment d'ordre p est un espace vectoriel. Par conséquent, T/U admet des moments de tout ordre.

En particulier, par linéarité de l'espérance et symétrie,

$$\mathbf{E}\left(\frac{T}{U}\right) = \mathbf{E}(Y_1) - \mathbf{E}(Y_2) = 0.$$

4. Comme Y_1 et Y_2 admettent un moment d'ordre deux, leur différence T/U admet un moment d'ordre deux et d'après la formule de bien connue

$$\mathbf{V}(T/U) = \mathbf{V}(Y_1) + \mathbf{V}(Y_2) - 2\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Comme Y_1 et Y_2 ont même loi et admettent un moment d'ordre deux, alors $\mathbf{V}(Y_1) = \mathbf{V}(Y_2)$ et comme Y_2 est une fonction affine de Y_1 :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_2(\omega) = 1 - Y_1(\omega),$$

on en déduit que

$$\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathbf{Cov}(Y_1, 1) - \mathbf{Cov}(Y_1, Y_1) = 0 - \mathbf{V}(Y_1).$$

🔗 La somme $Y_1 + Y_2$ étant constante, si l'une des deux variables aléatoires croît, l'autre doit décroître. Il est donc normal que la covariance soit négative.

Par conséquent,

$$\mathbf{V}(T/U) = 4\mathbf{V}(Y_1).$$

Solution 96

rms135-1495

La matrice $A(\omega)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent,

- si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, elle est diagonalisable;
- si $X(\omega) = Y(\omega)$, alors elle n'admet qu'une seule valeur propre et n'est pas une homothétie, donc elle n'est pas diagonalisable.

🔗 D'une part, toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable.

D'autre part, une matrice diagonalisable qui n'admet qu'une seule valeur propre λ doit être semblable à l'homothétie λI_n et donc en fait égale à l'homothétie λI_n .

Ainsi, la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable si, et seulement si, $X(\omega) \neq Y(\omega)$, ce qui prouve que "A est diagonalisable" est bien un évènement :

$$[X \neq Y] = [X = Y]^c = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k] \cap [Y = k] \right)^c \in \mathcal{A}.$$

🔗 Comme X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on déduit de la décomposition précédente que

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (q^{k-1})^2 = p^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} (q^2)^\ell = \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p}{1 + q}$$

et donc que

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y) = \frac{2q}{1 + q}.$$

Solution 97

rms135-1496

1. Une variable aléatoire de loi géométrique ne prend que des valeurs supérieures à 1, en particulier non nulles, donc Z est bien définie sur Ω .

De plus, le numérateur $X(\omega)$ est strictement positif et le dénominateur $Y(\omega)$ supérieur à 1 donc

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 < Z(\omega) \leq \frac{X(\omega)}{1} = X(\omega).$$

🔗 Ce n'est pas seulement un encadrement presque sûr, c'est un encadrement certain.

• En particulier, la variable aléatoire Z est bornée, donc elle admet des moments de tout ordre. Elle admet en particulier une espérance et une variance.

2. Comme X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on sait que X admet une espérance et que cette espérance est égale à $1/p$. Comme $1/Y$ est une variable aléatoire bornée (elle prend ses valeurs dans $]0, 1]$), elle est d'espérance finie.

Par hypothèse, X et Y sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X et $1/Y$ sont indépendantes. En tant que produit de variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie, la variable aléatoire Z est d'espérance finie (ce qu'on a déjà démontré) et de plus

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

• Puisque $1/Y$ est d'espérance finie, on peut appliquer la formule de transfert pour calculer son espérance.

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cdot p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k}.$$

Comme $0 < p < 1$, alors $0 < q = 1 - p < 1$ et on peut appliquer la formule bien connue des séries entières :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

On obtient ainsi

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{-p \ln(1-q)}{q} = \frac{-p \ln p}{q}.$$

• Comme $0 < p < 1$, cette expression est strictement positive, ce qui est cohérent avec le fait que $1/Y$ soit une variable aléatoire strictement positive.

3. Puisque X et Y prennent des valeurs entières strictement positives, le quotient Z prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}_+^*$.

• L'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable

— en tant que partie infinie de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$;

— en tant qu'image de l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par l'application $[(x, y) \mapsto x/y]$.

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe donc deux entiers naturels $m \geq 1$ et $n \geq 1$, premiers entre eux, tels que $r = m/n$. Puisque le quotient m/n est supposé irréductible,

$$Z(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{m}{n} \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \quad (X(\omega), Y(\omega)) = (km, kn).$$

Autrement dit,

$$[Z = r] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = km] \cap [Y = kn].$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$ et indépendance des variables aléatoires X et Y ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = r) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = km) \mathbf{P}(Y = kn) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{km-1} \cdot p q^{kn-1} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^{m+n})^k = \frac{p^2 q^{m+n-2}}{1 - q^{m+n}}. \end{aligned}$$

• Puisqu'on a calculé l'espérance de Z , on peut déduire l'égalité suivante de la formule de transfert.

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ m \wedge n = 1}} \frac{m}{n} \cdot \frac{p^2 q^{m+n-2}}{1 - q^{m+n}} = \frac{-p \ln p}{q}$$

Comme chacun sait, c'est bien plus beau lorsque c'est inutile.

Solution 98**rms135-1497**

L'entier $Z(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$ est supérieur à n si, et seulement si, les trois entiers $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ et $X_3(\omega)$ sont supérieurs à n . Autrement dit,

$$[Z \geq n] = [X_1 \geq n] \cap [X_2 \geq n] \cap [X_3 \geq n] \in \mathcal{A}$$

et comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi,

$$P(Z \geq n) = [P(X_1 \geq n)]^3 = q^{3n-3}.$$

▮ On doit savoir (cf 135-1493) que, si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq n) = q^{n-1}.$$

Comme Z est une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}^*$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [Z \geq n] = [Z = n] \sqcup [Z \geq n+1]$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [Z = n] = [Z \geq n] \cap [Z \geq n+1]^c \in \mathcal{A}.$$

▮ Comme Z est une fonction des variables aléatoires discrètes X_1 , X_2 et X_3 , on sait d'emblée que Z est une variable aléatoire discrète.

Le raisonnement qu'on vient de détailler prouve à nouveau que Z est une variable aléatoire discrète, ce qui n'était pas nécessaire, mais ce raisonnement a l'avantage de nous donner en plus la loi de Z .

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = q^{3n-3} - q^{3n} = (1 - q^3)(q^3)^{n-1}.$$

La variable aléatoire Z suit donc la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - q^3$.

▮ La méthode est la même avec un nombre fini quelconque de variables aléatoires indépendantes et de même loi. (On peut aussi étudier le maximum d'un tel échantillon.)

En particulier, le minimum d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi géométrique suit lui aussi une loi géométrique. (À ma connaissance, la loi du maximum n'a rien de remarquable.)

Solution 99**rms135-1498**

1. Par croissances comparées, il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} \cdot t^n = 0.$$

Puisque le terme général de la série entière reste borné quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière est infini.

2. Remarquons que $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 2n + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^{n-2}}{n!} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^2 + 2t + 1)e^t = (t+1)^2 e^t. \end{aligned}$$

▮ Ce n'est pas une astuce, c'est une méthode !

La présence de la factorielle au dénominateur doit nous conduire à interpréter la série entière comme une série de Taylor et donc à penser en termes de dérivée.

Il faut donc raisonner, non pas sur la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$, mais sur la base de Newton

$$(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3), \dots)$$

qui nous a rendu de grands services dans l'étude des séries génératrices.

Il est bon de retenir que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)t^n}{n!} = Q(t)e^t.$$

La réciproque est vraie : quel que soit le polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

et (formule du produit de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

donc

$$\forall n \geq d, \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^d a_k \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Cette formule est encore vraie pour $0 \leq n < d$ (les derniers termes de la somme sont nuls puisqu'un facteur est nul) et on reconnaît ici une expression de la forme $P(n)/n!$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ (donné par sa décomposition dans la base de Newton).

3. a. Par définition, $G_X(1) = 1$, donc $\lambda S(1) = 4\lambda e = 1$. On a donc nécessairement $\lambda = 1/4e$.

3. b. Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda(n^2 + n + 1)}{n!} \cdot t^n.$$

Par unicité du développement en série entière (le rayon de convergence est strictement positif), on peut identifier terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{n^2 + n + 1}{4n!e}.$$

3. c. Puisque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, la fonction génératrice G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert qui contient le segment $[-1, 1]$ et la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre.

En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = G'_X(1) = 8\lambda e = 2$$

puisque $S'(t) = (t^2 + 4t + 3)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même,

$$\mathbf{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 14\lambda e = 7/2$$

puisque $S''(t) = (t^2 + 6t + 7)e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 3/2.$$

Solution 100

rms135-1499

- Par symétrie de la covariance, la matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).
- Par définition du double produit matriciel et par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\top \cdot S \cdot \mathbf{U} &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i \mathbf{Cov}(X_i, X_j) u_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) \\ &= \mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j\right) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right). \end{aligned}$$

3. a. Le Théorème spectral nous dit que la matrice S est diagonalisable mais aussi qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres : il existe donc une base formée de colonnes $V_1, \dots, V_n$ telles que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad V_i^\top \cdot V_i = 1, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n, \quad V_i^\top \cdot V_j = 0 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad S V_i = \lambda_i \cdot V_i.$$

Comme de coutume, nous allons identifier les matrices colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Soit $U \in \mathbb{R}^n$. Il existe donc des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$U = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot V_i \quad (*)$$

et comme la base $(V_1, \dots, V_n)$ est une base **orthonormée**,

$$\|U\| = U^T \cdot U = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

▮ Puisque la base est orthonormée, on sait que $\alpha_i = U^T \cdot V_i$ — mais c'est sans importance ici.

Par linéarité, on déduit de (*) que

$$SU = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot SV_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \lambda_i) \cdot V_i$$

donc (puisque la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est **orthonormée**)

$$U^T \cdot S \cdot U = \sum_{i=1}^n (\alpha_i) \cdot (\alpha_i \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

3. b. Comme les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$, on a donc

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_1 \alpha_i^2 \quad \text{et donc} \quad U^T \cdot S \cdot U \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_1 \|U\|^2.$$

En divisant par $\|U\|^2 > 0$ (puisque $U \neq 0$), on en déduit que $f(U) \leq \lambda_1$ pour toute colonne $U \neq 0$.

• Si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1 , alors

$$U^T \cdot S \cdot U = U^T \cdot (\lambda_1 \cdot U) = \lambda_1 \|U\|^2$$

donc $f(U) = \lambda_1$.

Réciproquement, si $f(U) = \lambda_1$, alors $U^T \cdot S \cdot U = \lambda_1 \|U\|^2$, donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)}{\geq 0} \alpha_i^2 \geq 0 = 0,$$

ce qui prouve que tous les termes sont nuls et donc que $\alpha_i = 0$ pour tout i tel que $\lambda_1 > \lambda_i$. Par conséquent,

$$U = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i = \lambda_1}} \alpha_i \cdot V_i \quad \text{et donc} \quad SU = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i = \lambda_1}} \alpha_i \cdot SV_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i = \lambda_1}} \alpha_i \lambda_1 \cdot V_i = \lambda_1 \cdot U$$

et comme $U \neq 0$ par hypothèse, c'est bien un vecteur propre de S associé à λ_1 .

4. a. Il est clair que

$$S = (1 - a)I_3 + aJ_3 \quad \text{où} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait bien que les valeurs propres de J_3 sont 0 (associée au plan d'équation $x + y + z = 0$) et 3 (associée à la droite dirigée par $(1, 1, 1)$). Donc les valeurs propres de S sont $(1 - a) \times 1 + a \times 0 = 1 - a$ et $(1 - a) \times 1 + a \times 3 = 1 + 2a$. Comme $0 < a < 1$, on a $1 - a < 1 < 1 + 2a$, donc $\lambda_1 = 1 + 2a$ est la plus grande valeur propre de S et le sous-espace propre associé est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$.

▮ On a exprimé la matrice S comme un polynôme en J_3 , ce qui nous a permis d'exprimer les valeurs propres de S en fonction des valeurs propres de J_3 (et de ce polynôme P).

Comme la restriction de l'application polynomiale P au spectre de J_3 est injective, les sous-espaces propres de S et de J_3 sont les mêmes.

4. b. On en déduit que le maximum étudié est égal à $1 + 2a$ et que ce maximum est atteint exactement pour les colonnes U de la forme (x, x, x) avec $x \neq 0$.

Solution 101**rms135-1579**

1.

✎ **Rappel.** Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, la série $\sum p_k$ est une série convergente de terme général positif dont la somme est égale à 1.

On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (*)$$

✎ On obtient ce résultat en dérivant terme à terme la série entière $\sum x^n$.

Comme $x = 1/2 \in]-1, 1[$ et que

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \cdot (k-1) \cdot (1/2)^{k-2},$$

la série $\sum (k-1)2^{-k}$ est une série convergente de terme général positif et sa somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(1/2)^{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1/2)^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - 1/2)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 4,$$

ce qui prouve qu'il existe bien une variable aléatoire X telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

2. D'après (*),

$$\forall t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)t^k = \frac{t^2}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k(t/2)^{k-1} = \frac{t^2}{(2-t)^2}.$$

3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum k(t/2)^{k-1}$ est égal à 2, donc la fonction génératrice est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $] -2, 2[$.

✎ Le terme général tend vers 0 pour $|t| < 2$ et vers $+\infty$ pour $t = 2$, donc le rayon de convergence est égal à 2.

En particulier, la fonction génératrice G est deux fois dérivable en $t = 1$, donc

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = 4 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X(X-1)) = G''(1) = 16$$

car

$$\forall t \in [0, 1], \quad G'(t) = \frac{4t}{(2-t)^3} \quad \text{et} \quad G''(t) = \frac{8(1+t)}{(2-t)^3}.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) - [\mathbf{E}(X)]^2 = 4.$$

Solution 102**rms135-1580**

1. On considère une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq N}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

✎ On modélise ainsi la répartition des N boules parmi les n urnes : l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé lorsque la boule k arrive dans l'urne i .

On définit alors des variables aléatoires de Bernoulli $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ en posant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad [T_i = 1] = \bigcap_{k=1}^N [X_k \neq i]$$

et la variable aléatoire T_i est bien égale à 1 si, et seulement si, l'urne i est vide (= toutes les boules sont rangées dans une autre urne).

▮ Une fonction $T : \Omega \rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket$ est une variable aléatoire (de Bernoulli) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ si, et seulement si, l'image réciproque $[T = 1]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

Comme les X_k sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, il est clair que $[T_i = 1]$ est un élément de $\mathcal{A}$ (en tant qu'intersection d'un nombre fini d'événements).

♣ Le nombre d'urnes vides est le nombre d'indices $1 \leq i \leq n$ tels que la variable aléatoire T_i prend la valeur 1. Par conséquent,

$$Y_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (en tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires).

L'application S_n est aussi une combinaison linéaire des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$, donc c'est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

2. Puisque la variable aléatoire T_i ne prend que les valeurs 0 et 1, sa loi est une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et par conséquent $\mathbf{E}(T_i) = p$ et $\mathbf{V}(T_i) = pq$ (en posant $q = 1 - p$).

Comme les X_k sont, par construction, indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad p = \mathbf{P}(T_i = 1) = \prod_{k=1}^N \mathbf{P}(X_k \neq i) = [1 - \mathbf{P}(X_k = i)]^N = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N.$$

▮ Les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ suivent donc toutes la même loi. Elles ne sont pas indépendantes, car l'événement

$$\bigcap_{i=1}^n [T_i = 1]$$

est impossible (les urnes ne peuvent pas être toutes vides!), alors que la probabilité

$$\prod_{i=1}^n \mathbf{P}(T_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nN}$$

est strictement positive.

3. Par bilinéarité et symétrie de la covariance,

$$\mathbf{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{V}(T_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(T_i, T_j) \right)$$

et comme les variables aléatoires T_i suivent toutes la même loi, on déduit de la formule de Koenig-Huyghens que

$$\mathbf{Cov}(T_i, T_j) = \mathbf{E}(T_i T_j) - \mathbf{E}(T_i) \mathbf{E}(T_j) = \mathbf{E}(T_i T_j) - [\mathbf{E}(T_1)]^2.$$

En tant que produit de deux variables aléatoires de Bernoulli, la variable aléatoire $T_i T_j$ suit aussi une loi de Bernoulli et $\mathbf{E}(T_i T_j) = \mathbf{P}(T_i T_j = 1)$. Or

$$[T_i T_j = 1] = [T_i = 1] \cap [T_j = 1] = \bigcap_{k=1}^N [X_k \neq i, X_k \neq j] = \bigcap_{k=1}^N [X_k \notin \{i, j\}].$$

Les variables aléatoires X_k étant indépendantes et de loi uniforme, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \quad \mathbf{E}(T_i T_j) = \prod_{k=1}^N \mathbf{P}(X_k \notin \{i, j\}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^N.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2} \left(n \mathbf{V}(T_1) + 2 \binom{n}{2} \mathbf{Cov}(T_1, T_2) \right) \\ &= \frac{pq}{n} + \frac{n-1}{n} \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^N - p^2 \right] \end{aligned}$$

où p et $q = 1 - p$ ont été calculés à la question précédente.

Solution 103**rms135-1581**

1. Puisqu'on effectue des tirages **avec** remise, on modélise l'expérience au moyen d'une suite $(U_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

• Il faut au moins deux tirages pour obtenir deux boules distinctes, donc l'application X prend des valeurs entières supérieures à 2 (et éventuellement la valeur $+\infty$ au cas où on tirerait indéfiniment la même boule).

Pour tout entier naturel $k \geq 2$,

$$[X_n = k] = [U_1 = \dots = U_{k-1} \neq U_k] = \bigcup_{i=1}^n [U_1 = i, \dots, U_{k-1} = i, U_k \neq i] \in \mathcal{A}.$$

• Comme les U_i sont, par construction, des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, les $[U_j = i]$ et $[U_j \neq i] = [U_j = i]^c$ sont des évènements. On peut alors conclure parce qu'une tribu est stable par intersection finie et par union finie.

D'autre part,

$$[X_n = +\infty] = \bigcap_{k=2}^{+\infty} [U_k = U_1] = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i] \in \mathcal{A}.$$

• Une tribu est aussi stable par intersection dénombrable.

Cela prouve que $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est une variable aléatoire discrète.

• Comme les variables aléatoires U_i sont indépendantes et de même loi,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = n \mathbf{P}(U_1 = \dots = U_{k-1} = 1, U_k \neq 1) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

D'autre part, pour tout entier $K \geq 1$,

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i] \subset \bigcap_{k=1}^K [U_k = i],$$

donc, toujours pour les mêmes raisons,

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i]\right) \leq [\mathbf{P}(U_1 = i)]^K = \frac{1}{n^K}.$$

On en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [U_k = i]\right) = 0$$

et comme une union (finie ou même dénombrable) d'évènements négligeables est encore un évènement négligeable, on en déduit que la variable aléatoire X_n est presque sûrement finie :

$$\mathbf{P}(X_n = +\infty) = 0.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$k \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{(n-1)k}{n^{k-1}} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{2025}}\right)$$

donc la série $\sum k \mathbf{P}(X_n = k)$ est (absolument) convergente et X_n est bien une variable aléatoire d'espérance finie.

Par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbf{P}(X_n = k) = (n-1) \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = (n-1) \left[\frac{1}{(1-1/n)^2} - 1 \right] = \frac{2n-1}{(n-1)^2}.$$

• Lorsque n devient grand, l'espérance de X_n devient proche de 2 et c'est tout à fait normal : lorsqu'il y a un grand nombre de boules dans l'urne, il y a de très fortes chances pour que les deux premières boules tirées diffèrent et donc pour que X_n soit égal à 2.

• On notera que l'espérance de X_n tend vers 2 par valeurs supérieures — toutes les valeurs de X_n sont supérieures à 2 !

3. a. Pour $n = 2$, l'urne ne contient que deux boules. Par conséquent, le nombre de tirages au terme desquels on a tiré les deux boules de l'urne est aussi le rang du tirage où on obtient pour la première fois une (la!) boule distincte de la boule tirée en premier.

Autrement dit : $Y_2 = X_2$.

🔗 Il s'agit d'une égalité de fonctions et non pas seulement d'une égalité en loi!

En particulier,

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(Y_2 = k) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

🔗 Ce n'est pas une loi géométrique mais presque : la loi de $Y_2 - 1$ est la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$.

3. b. Cette fois, l'urne contient $n = 3$ boules.

— Au premier tirage, on tire la première boule. (Jusque là, tout va bien, non?)

— Au tirage X_3 , on tire pour la première fois une autre boule. Si $X_3 = i$, alors les boules $U_2, \dots, U_{i-1}$ sont toutes égales à la boule U_1 .

— Au tirage Y_3 , on tire la troisième et dernière boule pour la première fois. Si $Y_3 = j$, alors les boules $U_{i+1}, \dots, U_{j-1}$ sont égales à U_1 ou à U_i .

Ainsi, pour $2 \leq i < j$,

$$[X_3 = i, Y_3 = j] = [U_1 = \dots = U_{i-1}, U_i \neq U_1, U_{i+1} \in \{U_1, U_i\}, \dots, U_{j-1} \in \{U_1, U_i\}, U_j \notin \{U_1, U_i\}].$$

Il y a trois valeurs possibles pour la première boule tirée et seulement deux pour la boule tirée au rang X_3 . On a donc

$$[X_3 = i, Y_3 = j] = \bigcup_{k=1}^3 \bigcup_{\substack{1 \leq \ell \leq 3 \\ \ell \neq k}} [U_1 = k, \dots, U_{i-1} = k, U_i = \ell, U_{i+1} \in \{k, \ell\}, \dots, U_{j-1} \in \{k, \ell\}, U_j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k, \ell\}].$$

🔗 Cette décomposition prouve (enfin!) que $[X_3 = i, Y_3 = j]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

Comme X_3 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et que l'évènement $[X_3 = i, Y_3 = j]$ est impossible pour $i \geq j$, on a

$$[Y_3 = j] = \bigcup_{i=2}^{j-1} [X_3 = i, Y_3 = j] \in \mathcal{A}$$

pour tout entier $j \geq 3$.

D'autre part, Y_3 prend la valeur $+\infty$ lorsque l'une (au moins) des boules n'est jamais tirée, c'est-à-dire

$$[Y_3 = +\infty] = \bigcup_{k=1}^3 \bigcap_{\ell=1}^{+\infty} [U_i \neq k] \in \mathcal{A}.$$

Nous pouvons donc continuer sereinement : l'application Y_3 est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Comme les variables aléatoires $U_1, \dots$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, on en déduit que

$$\forall 2 \leq i < j, \quad \mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{j-i}}{3^{j-1}}.$$

🔗 Pour $i \geq j$, l'évènement $[X_3 = i, Y_3 = j]$ est impossible et sa probabilité est donc nulle.

♣ Si j est fixé, l'entier i varie entre 2 et $(j-1)$, donc

$$\begin{aligned} \forall j \geq 3, \quad \mathbf{P}(Y_3 = j) &= \sum_{i=2}^{j-1} \mathbf{P}(X_3 = i, Y_3 = j) \\ &= \frac{1}{3^{j-1}} \sum_{i=2}^{j-1} 2^{j-i} = \frac{1}{3^{j-1}} \sum_{k=1}^{j-2} 2^k = \frac{1}{3^{j-1}} \cdot 2^1 \cdot \frac{2^{j-2} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{j-1} - 2}{3^{j-1}}. \end{aligned}$$

🔗 Il est judicieux d'appliquer une nouvelle fois la formule de la somme géométrique pour vérifier que

$$\sum_{j=\mathbf{P}}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_3 = j) = 1$$

ce qui prouve que la variable aléatoire Y_3 est presque sûrement finie.

Solution 104**rms135-1582**

1. Initialement, l'urne contient N boules. En effectuant N tirages consécutifs **sans** remise, on vide complètement l'urne. Puisque les boules sont indiscernables (sauf par leur couleur!), la succession des N tirages peut être représentée par un ensemble I de r entiers choisis dans $\llbracket 1, N \rrbracket$: un entier $1 \leq i \leq N$ appartient à I si, et seulement si, le i -ème tirage a donné une boule blanche.

Notons donc E_r , l'ensemble des parties de $\llbracket 1, N \rrbracket$ dont le cardinal est égal à r . Le cardinal de E_r est égal à $\binom{N}{r}$ (on choisit r éléments parmi N).

On modélise l'expérience par une variable aléatoire U définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi uniforme sur E_r :

$$\forall I \in E_r, \quad \mathbf{P}(U = I) = \frac{1}{\binom{N}{r}}.$$

Comme U ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire discrète.

♣ Le nombre de tirages nécessaires pour qu'il ne reste plus aucune boule blanche dans l'urne est aussi le numéro du tirage qui donne la dernière boule blanche. Autrement dit,

$$X = \max U.$$

Comme U est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ (par construction), on en déduit que X , en tant que fonction de U , est aussi une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

♣ Pour $r = 1$, on a $E_r = \{\{1\}, \dots, \{N\}\}$ et comme les valeurs de U sont des singletons,

$$\forall 1 \leq k \leq N, \quad [X = k] = [U = \{k\}], \quad \text{donc} \quad \forall 1 \leq k \leq N, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{N}.$$

La variable aléatoire X suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ et en particulier $\mathbf{E}(X) = \frac{N+1}{2}$.

♣ Pour $r = N$, l'ensemble E_r est un singleton : $E_r = \{\llbracket 1, N \rrbracket\}$ donc la variable aléatoire X est constante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = N$$

et en particulier $\mathbf{E}(X) = N$.

2. a. Dans le meilleur des cas, on tire les r boules blanches au cours des r premiers tirages, donc X est au moins égal à r .

Dans le pire des cas, la N -ième et dernière boule tirée est blanche et dans ce cas, X est égal à N .

Les valeurs prises par X sont donc comprises entre r et N (inclus).

2. b. Puisque la loi de U est uniforme sur E_r , il s'agit de compter le nombre d'ensembles $I \in E_r$ pour lesquels $\max I = k$.

Choisir r entiers parmi $1, \dots, N$ sachant que le plus grand élément est égal à k revient à choisir $(r-1)$ entiers parmi $1, \dots, (k-1)$, ce qui fait $\binom{k-1}{r-1}$ et

$$\forall r \leq k \leq N, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

🔗 On retrouve ainsi les cas particuliers $r = 1$ et $r = N$ traités à la question précédente.

3. Quels que soient les entiers $p \geq q \geq 1$, on a $p-1 \geq q-1 \geq 0$ et

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p}{q} \cdot \frac{(p-1)!}{(q-1)!((p-1)-(q-1))!} = \frac{p}{q} \binom{p-1}{q-1}.$$

♣ La variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, d'après la relation qu'on vient d'établir,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=r}^N k \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \sum_{k=r}^N r \frac{\binom{k}{r}}{\binom{N}{r}} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r}.$$

On peut démontrer par récurrence (sur $N \geq r$) la formule généralisée du triangle de Pascal :

$$\forall N \geq r, \quad \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}.$$

🔗 Bien entendu, l'hérédité de cette propriété repose sur la formule habituelle du triangle de Pascal.

On peut aussi en proposer une démonstration combinatoire, tout à fait dans l'esprit de l'exercice :

- Il y a $\binom{N+1}{r+1}$ manières de choisir une partie de cardinal $(r+1)$ dans l'ensemble $\llbracket 1, N+1 \rrbracket$ de cardinal $(N+1)$.
- Le plus grand élément d'une telle partie est au moins égal à $(r+1)$ (lorsque la partie choisie est $\{1, \dots, r+1\}$) et au plus égal à $(N+1)$ (on n'ira pas plus loin).
- Si le plus grand élément de la partie choisie est égal à $k+1 \in \llbracket r+1, N+1 \rrbracket$, alors il reste à choisir les r autres éléments dans l'intervalle $\llbracket 1, k \rrbracket$, ce qui donne $\binom{k}{r}$ choix.

Finalement,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}} \binom{N+1}{r+1} = \frac{r}{r+1} (N+1).$$

Solution 105

rms135-1583

1. Par hypothèse, quels que soient les entiers naturels m et n ,

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(Y = n \mid X = m).$$

Si $n > m$, le second facteur est nul (la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ est portée par l'intervalle $\llbracket 0, m \rrbracket$), donc $\mathbf{P}(X = m, Y = n) = 0$. Et si $0 \leq n \leq m$, alors

$$\mathbf{P}(X = m, Y = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \binom{m}{n} p^n q^{m-n} = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!}.$$

2. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $([X = m])_{m \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et par conséquent

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \cdot \frac{(\lambda q)^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda q} \cdot \frac{(\lambda p)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

3. Comme X et Y suivent une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ et que $\mathbf{P}(Y = 1) > 0$. Mais la loi conjointe nous dit que $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$ et comme $[X = 0, Y = 1] \subset [Y \leq X]^c$, alors

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0) \mathbf{P}(Y = 1).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

✎ Pour arriver à cette conclusion, on s'est appuyé sur une propriété remarquable ($\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$) qui nous a permis de mettre en évidence un événement négligeable.

Attention, si une propriété comme $\mathbf{P}(Y \leq X) = 1$ indique qu'une contrainte relie X et Y , elle n'empêche pas que les variables aléatoires soient indépendantes. Par exemple, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli, alors U et $V+1$ sont encore des variables aléatoires indépendantes et ces deux variables aléatoires vérifient $\mathbf{P}(U \leq V+1) = 1$.

4. L'application Z est une variable aléatoire comme combinaison linéaire de deux variables aléatoires. On décompose l'événement $[Z = k]$ avec le système complet d'événements lié à la variable aléatoire X :

$$[Z = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, X - Y = k] = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} [X = m, Y = m - k].$$

Comme $\mathbf{P}(Y \geq 0) = 1$ (loi de Poisson),

$$\forall 0 \leq m < k, \quad 0 \leq \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) \leq \mathbf{P}(Y = m - k) = 0,$$

il ne reste donc que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = m, Y = m - k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^n}{n!} = e^{-\lambda + \lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^k}{k!}.$$

La variable aléatoire Z suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q)$.

✎ On peut vérifier que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes et relier les calculs qui précèdent à la stabilité de la loi de Poisson pour l'addition.

Solution 106**rms135-1584**

1. Comme Y est, par construction, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $[Y = n] \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut décomposer l'évènement $[Y = n]$ sur le système complet d'évènements associé à X :

$$[Y = n] = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} [X = k, Y = n].$$

Par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n.$$

▮ C'est bien sûr la formule du binôme qui nous dit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

▮ Quels que soient les entiers naturels k et n , l'expression de $\mathbf{P}(X = k, Y = n)$ est un réel positif. On vient de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$(\mathbf{P}(X = k, Y = n))_{k \in \mathbb{N}}$$

était sommable (elle ne compte qu'un nombre fini de termes non nuls !) et la formule de la somme géométrique permet de vérifier que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = 1.$$

Le Théorème de Fubini nous assure alors que la famille

$$(\mathbf{P}(X = k, Y = n))_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$$

est une famille sommable de réels positifs dont la somme est égale à 1. Il s'agit donc bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$ et cela démontre que l'énoncé a bien un sens : il existe un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est décrite par cette famille de réels.

2. a. On connaît la somme géométrique :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

2. b. Lorsque le rayon de convergence R d'une série entière est strictement positif (et, ici, il est égal à 1), la somme S de cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$ et ses dérivées peuvent être calculées en dérivant terme à terme sur le même intervalle ouvert :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]-1, 1[, \quad S^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) t^{n-k}$$

et on peut réécrire cette égalité sous une forme plus brève :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^{n-k}.$$

3. Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors $[X = k] \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et comme Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut décomposer l'évènement $[X = k]$ sur le système complet d'évènements associé à Y :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [X = k] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [X = k, Y = n]$$

et, par σ -additivité de $\mathbf{P}$,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n = p \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n = \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k. \end{aligned}$$

La formule de la somme géométrique nous permet de vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1.$$

Solution 107

rms135-1585

1. Comme α et λ sont strictement positifs, la famille $(\alpha\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs. Comme $0 < \lambda < 1$, c'est une famille sommable (comparaison à une série géométrique) et

$$1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\lambda^n = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} = \frac{1 - (1+\alpha)\lambda}{1-\lambda} > 0$$

puisque $(1+\alpha)\lambda < 1$.

Il existe donc une variable aléatoire E définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que

$$\mathbf{P}(E = 0) = \frac{1 - (1+\alpha)\lambda}{1-\lambda} = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(E = n) = \alpha\lambda^n.$$

L'énoncé suggérant qu'une telle variable aléatoire modélise le nombre d'enfants par famille, on peut conclure que la probabilité pour qu'une famille n'ait pas d'enfant est égale à $\mathbf{P}(E = 0)$.

2. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \quad (*)$$

Voir 135-1584 pour les détails.

3. Toute variable aléatoire $G : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(G = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(G = k \mid E = n) \mathbf{P}(E = n)$$

(décomposition de l'évènement $[G = k] \in \mathcal{A}$ dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète E).

L'énoncé ne veut rien dire, il faut une fois de plus formuler les questions qu'on va résoudre...

On interprète l'énoncé en considérant que, pour tout $n \geq 1$, la loi conditionnelle sachant $[E = n]$ de la variable aléatoire G qui décrit le nombre de garçons est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Bien entendu, conditionnellement à l'évènement $[E = 0]$, la variable aléatoire G est presque sûrement égale à 0.

Combien de garçons dans une famille qui n'a pas d'enfant ? Hein ?

Il faut prendre en compte ce cas particulier car $\mathbf{P}(E = 0) \neq \alpha$.

Nous supposons donc dorénavant que

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}(G = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot \alpha\lambda^n \quad (\dagger)$$

et que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G = 0) &= \mathbf{P}(E = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} q^n \cdot \alpha\lambda^n \\ &= 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda q)^n = 1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\lambda} + \frac{\alpha\lambda q}{1-\lambda q} = 1 - \frac{\alpha\lambda p}{(1-\lambda)(1-\lambda q)}. \end{aligned}$$

3. a. On a calculé ci-dessus la valeur de $\mathbf{P}(G = 0)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on déduit de $(*)$ et de $(\dagger)$ que

$$\mathbf{P}(G = k) = \alpha \left(\frac{p}{q}\right)^k \cdot \frac{(\lambda q)^k}{(1-\lambda q)^{k+1}} = \frac{\alpha(\lambda p)^k}{(1-\lambda q)^{k+1}}.$$

3. b. Il s'agit de calculer maintenant

$$P(G \geq 2 | G \geq 1) = \frac{P([G \geq 2] \cap [G \geq 1])}{P(G \geq 1)} = \frac{P(G \geq 2)}{P(G \geq 1)}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall k \geq 1, \quad P(G \geq k+1) = \frac{\lambda p}{1 - \lambda q} P(G \geq k).$$

En sommant sur $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$P(G \geq 2) = \frac{\lambda p}{1 - \lambda q} P(G \geq 1)$$

et donc que

$$P(G \geq 2 | G \geq 1) = \frac{\lambda p}{1 - \lambda q}.$$

On peut calculer explicitement $P(G \geq 1)$ et $P(G \geq 2)$ (puisque ce sont des sommes géométriques), mais c'est vraiment du temps perdu!

Solution 108

rms135-1586

1. Une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'espérance et la variance de X sont égales au paramètre λ .

2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$U(\omega) \geq k \iff X(\omega) \geq k \quad \text{et} \quad Y(\omega) \geq k$$

donc $[U \geq k] = [X \geq k] \cap [Y \geq k]$. Comme X et Y sont, par hypothèse, des variables aléatoires, les images réciproques $[X \geq k]$ et $[Y \geq k]$ sont des événements et comme une tribu est stable par intersection,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [U \geq k] \in \mathcal{A}.$$

• Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $[U \geq k] = [U = k] \sqcup [U \geq k+1]$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad [U = k] = [U \geq k] \cap [U \geq k+1]^c \in \mathcal{A}$$

(puisque une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection). On a ainsi démontré que U était une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

• Comme X et Y sont supposées indépendantes et de même loi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U \geq k) = [P(X \geq k)]^2 > 0.$$

• On peut montrer de manière analogue que V est une variable aléatoire discrète et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V \leq k) = [P(X \leq k)]^2 > 0.$$

• Par définition, l'événement $[U > V]$ est impossible et comme $[U \geq 2] \cap [V \leq 1] \subset [U > V]$, on a

$$P(U \geq 2, V \leq 1) = 0 < P(U \geq 2) P(V \leq 1),$$

ce qui prouve que les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

3. On remarque tout d'abord que $U + V = X + Y$.

La somme de la plus grande et de la plus petite, c'est la somme des deux variables aléatoires!

Comme X et Y sont indépendantes et suivent la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $U + V$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(2\lambda)$.

• De manière analogue, $V - U = |X - Y|$.

La différence entre la plus grande et la plus petite, c'est la distance entre les deux variables aléatoires.

• Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$[V - U = d] = [|X - Y| = d] = [X - Y = d] \sqcup [Y - X = d].$$

En décomposant dans les systèmes complets d'évènements $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ et $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$, on en déduit que

$$[V - U = d] = \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [X = k + d, Y = k] \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [X = k, Y = k + d] \right).$$

Comme X et Y sont indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\mathbf{P}(V - U) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k + d) \mathbf{P}(X = k) > 0.$$

✚ Pour $d = 0$, la situation est un peu différente :

$$[V - U] = [X = Y] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [X = k, Y = k]$$

et donc

$$\mathbf{P}(V - U) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)^2 > 0.$$

✚ On a ainsi démontré que

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}(U + V = k) \mathbf{P}(V - U = \ell) > 0.$$

Cela étant,

$$[U + V = 0, V - U = 1] = [2U = -1] \cap [2V = 1] = \emptyset$$

car U et V sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc

$$\mathbf{P}(U + V = 0, V - U = 1) = 0 < \mathbf{P}(U + V = 0) \mathbf{P}(V - U = 1)$$

et les variables aléatoires $U + V$ et $V - U$ ne sont pas indépendantes.

✚ Il fallait ici remarquer que la probabilité

$$\mathbf{P}(U + V = k, V - U = \ell) = \mathbf{P}(2U = k - \ell, 2V = k + \ell)$$

est nulle dès que les entiers k et ℓ sont de parités différentes.

Solution 109

rms135-1587

1. Comme X sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq X(\omega) \leq Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) + 1.$$

Comme Z suit une loi géométrique, cette variable aléatoire admet un moment d'ordre deux et, par comparaison, X admet aussi un moment d'ordre deux. En particulier, X est une variable aléatoire d'espérance finie.

Comme X et Y ont même loi, Y est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et de variance finie.

✚ Par linéarité de l'espérance et par indépendance des variables aléatoires X et Y ,

$$\frac{1}{p} = \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 \quad \text{et} \quad \frac{q}{p^2} = \mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Comme X et Y ont même loi, on en déduit que

$$\frac{1}{p} = 2\mathbf{E}(X) + 1 \quad \text{et que} \quad \frac{q}{p^2} = 2\mathbf{V}(X).$$

Donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{q}{2p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}.$$

2. Comme Z suit la loi géométrique de paramètre p , on sait que

$$G_Z(t) = \frac{pt}{1 - qt}.$$

Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X \cdot t^Y \cdot t) = t [\mathbf{E}(t^X)]^2.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}} = \sqrt{p} \cdot (1-qt)^{-1/2}.$$

Sur $[0, 1]$, la fonction génératrice $G_X(t)$ est positive en tant que somme de termes positifs.

D'autre part, le rayon de convergence de cette série entière est égal à $1/q$.

3. On reconnaît une série entière bien connue et on en déduit, après quelques simplifications tout aussi connues, que

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{p} \left(\frac{q}{4}\right)^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

L'égalité ayant lieu sur un intervalle de longueur strictement positive, on en déduit (unicité du développement en série entière) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \sqrt{p} \left(\frac{q}{4}\right)^n \cdot \binom{2n}{n}.$$

Solution 110

rms135-1588

1. Les variables aléatoires X_k sont des variables aléatoires d'espérance finie, donc M_n est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k$$

par linéarité de l'espérance.

On doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli est égale au paramètre de la loi.

2. Les variables aléatoires X_k sont des variables aléatoires de variance finie, donc M_n est une variable aléatoire de variance finie et, par indépendance des X_k ,

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k).$$

Toute variable aléatoire bornée (ou presque sûrement bornée) admet des moments de tout ordre : c'est donc une variable aléatoire d'espérance finie et une variable aléatoire de variance finie.

On sait bien que $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq V(M_n) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}.$$

Par encadrement, la variance de M_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On a ainsi démontré que l'espérance de M_n (= la valeur moyenne des observations réalisées) tendait vers le paramètre p cependant que la variance de M_n (= la dispersion de ces valeurs) tendait vers 0. On dit que M_n est un **estimateur convergent** de p .

3. a. Comme M_n est une variable aléatoire de variance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{4V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

et comme $V(M_n)$ tend vers 0, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|M_n - \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0.$$

3. b. La suite de terme général $E(M_n)$ converge vers p . Comme $\varepsilon/2 > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |M_n - p| \leq \varepsilon/2.$$

Par inégalité triangulaire,

$$||M_n(\omega) - p| - |E(M_n) - p|| \leq |M_n(\omega) - E(M_n)|.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N$, si $|M_n(\omega) - p| \geq \varepsilon$, alors

$$|M_n(\omega) - p| - |\mathbf{E}(M_n) - p| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

et par conséquent

$$|M_n(\omega) - \mathbf{E}(M_n)| \geq \varepsilon/2.$$

♣ On a ainsi démontré que

$$\forall n \geq N, \quad [|M_n - p| \geq \varepsilon] \subset [|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geq \varepsilon/2].$$

En conséquence, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{4\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2}.$$

On en déduit (Théorème d'encadrement) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|M_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

Solution 111

rms135-1589

1. Le polynôme caractéristique de M est égal à $X^2 - 2bX + a^2$ et le discriminant réduit de ce polynôme est $b^2 - a^2$.
 Si $b^2 > a^2$, alors $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc M est diagonalisable.
 Si $b^2 < a^2$, alors le polynôme caractéristique de M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc M n'est même pas trigonalisable.
 Si $b = \pm a$, alors M est proportionnelle à

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou à} \quad M_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices n'ont qu'une seule valeur propre (1 pour $M_{1,1}$ et -1 pour $M_{1,-1}$) et elles ne sont pas diagonales, donc elles ne sont pas diagonalisables.

Finalement, la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $|b| > |a|$.

2. a. Calcul classique avec la σ -additivité de $\mathbf{P}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = q_2^n.$$

2. b. Comme X et Y sont des variables aléatoires à valeurs positives, la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable si, et seulement si, $Y(\omega) > X(\omega)$ et on cherche donc à calculer $\mathbf{P}(Y > X)$.

♣ On décompose l'évènement $[Y > X]$ sur le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète X :

$$[Y > X] = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} [Y > n] \cap [X = n]$$

et, par σ -additivité à nouveau,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n, X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n) \mathbf{P}(X = n)$$

puisque X et Y sont supposées indépendantes. D'après le calcul précédent,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_2^n q_1^{n-1} p_1 = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}.$$

3. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ est symétrique : X et $n - X$ ont même loi et comme X et Y sont indépendantes, les deux couples (X, Y) et $(n - X, n - Y)$ ont même loi.

♣ Dans un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire binomiale X compte le nombre de succès et $n - X$ compte donc le nombre d'échecs. Comme le second paramètre p est égal à $1/2$, échecs et succès se produisent avec la même probabilité, ce qui explique la symétrie de $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

En particulier, comme $[Y > X] = [n - X > n - Y]$,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \mathbf{P}(n - X > n - Y) = \mathbf{P}(X > Y)$$

et comme $([X = Y], [X > Y], [X < Y])$ est un système complet d'évènements,

$$\mathbf{P}(Y > X) = \frac{1 - \mathbf{P}(X = Y)}{2}.$$

• En décomposant l'évènement $[X = Y]$ dans le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire discrète X , on obtient

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)^2$$

par indépendance de X et de Y .

Donc

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

d'après la (bien connue) identité de Vandermonde et finalement, la probabilité pour que la matrice M soit diagonalisable est égale à

$$\frac{4^n - \binom{2n}{n}}{2 \cdot 4^n}.$$

✎ On peut déduire de la formule de Stirling que $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc il y a peine moins d'une chance sur deux pour que la matrice M soit diagonalisable.