Problème de Mathématiques

Référence pp1522 — Version du 31 décembre 2025

---

1. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a. Démontrer que la matrice M est diagonalisable. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
☞ *Calculatrice autorisée !*

1. b. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$$

et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \phantom{^3/_4 u_n +{}} {}^3/_4 v_n \\ v_{n+1} = {}^3/_4 u_n + w_n \\ w_{n+1} = {}^1/_4 u_n + {}^1/_4 v_n \end{cases}.$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

2. Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC de la manière suivante :

— Initialement, le mobile est en A ;
— S'il est en A à l'instant n, alors il est en B avec probabilité ${}^3/_4$ et en C avec probabilité ${}^1/_4$ à l'instant $(n+1)$;
— S'il est en B à l'instant n, alors il est en A avec probabilité ${}^3/_4$ et en C avec probabilité ${}^1/_4$ à l'instant $(n+1)$;
— S'il est en C à l'instant n, alors il est en B à l'instant $(n+1)$.

On note A_n (resp. B_n, resp. C_n), l'événement *à l'instant* n*, le mobile se trouve en* A (resp. *en* B, resp. *en* C) et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \mathbf{P}(A_n), \quad b_n = \mathbf{P}(B_n), \quad c_n = \mathbf{P}(C_n).$$

2. a. Démontrer que $\mathbf{P}(C_2) = {}^3/_{16}$.

2. b. Établir des relations de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.

2. c. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution ❀ Marche aléatoire sur trois points

1. a. À un facteur constant près, $\det(M-\lambda I_3)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} -4\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -4\lambda & 4 \\ 1 & 1 & -4\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4\lambda & 3+4\lambda & 0 \\ 3 & -(3+4\lambda) & 4 \\ 1 & 0 & -4\lambda \end{vmatrix} \qquad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$$

$$= 4(3+4\lambda)\begin{vmatrix} -4\lambda & 1 & 0 \\ 3-4\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$= -4(3+4\lambda)[\lambda(4\lambda-3)-1] = -4(3+4\lambda)(\lambda-1)(4\lambda+1)$$

donc le polynôme caractéristique de M est égal à

$$\frac{1}{16}(4X+3)(4X+1)(X-1).$$

Comme $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes :

$$-3/4, \quad -1/4, \quad 1$$

elle est diagonalisable.

❧ Cherchons une base explicite de vecteurs propres : les sous-espaces propres de M sont les noyaux des matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

donc les colonnes de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 \\ -1 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de M associés respectivement à $-3/4$, $-1/4$ et 1. Ce sont donc des vecteurs linéairement indépendants, donc P est bien inversible et

$$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(-3/4, -1/4, 1).$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P\,\mathrm{Diag}\big((-3/4)^n, (-1/4)^n, 1\big)$$

et le moment est venu de sortir la calculatrice...

$$M^n = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} + \frac{(-3/4)^n}{14}\begin{pmatrix} 5 & -9 & 12 \\ 5 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1/4)^n}{10}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -12 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

> *Cette décomposition de M^n fait apparaître trois matrices de rang 1 : ce sont les projecteurs spectraux de M (projections sur un sous-espace propre parallèlement à la somme des deux autres).*

1. b. On remarque que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on déduit de la question précédente que

$$u_n = \frac{12}{35} + \frac{5}{14}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^n + \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$
$$v_n = \frac{16}{35} + \frac{5}{14}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^n - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$
$$w_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

(on lit la première colonne de M^n).

2. Pour présenter l'exercice sous une forme mathématiquement correcte, on aurait dû admettre l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et de trois suites d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (A_n, B_n, C_n) soit un système complet d'événements ;
— L'état initial soit décrit par :

$$\mathbf{P}(A_0) = 1, \qquad \mathbf{P}(B_0) = \mathbf{P}(C_0) = 0$$

— La transition soit décrite par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) &= 3/4 \\ \mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) &= 1/4 \\ \mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n) &= 3/4 \\ \mathbf{P}(C_{n+1} \mid B_n) &= 1/4 \\ \mathbf{P}(B_{n+1} \mid C_n) &= 1 \end{cases}.$$

2. a. On répondra à cette question après avoir traité la question suivante.

2. b. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})\,\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1})\,\mathbf{P}(C_n) \\ &= 0 + \frac{3}{4}b_n + 0 \\ \mathbf{P}(B_{n+1}) &= \mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1})\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1})\,\mathbf{P}(C_n) \\ &= \frac{3}{4}a_n + 0 + c_n \\ \mathbf{P}(C_{n+1}) &= \mathbf{P}_{A_n}(C_{n+1})\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}_{B_n}(C_{n+1})\,\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1})\,\mathbf{P}(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + 0 \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) &= 1 - \mathbf{P}_{A_n}(B_{n+1}) - \mathbf{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0, \\ \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) &= 1 - \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) - \mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1}) \leqslant 0, \\ \mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1}) &= 1 - \mathbf{P}_{C_n}(B_{n+1}) - \mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) \leqslant 0, \\ \mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1}) &= 1 - \mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) - \mathbf{P}_{B_n}(C_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

et en particulier

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Or

$$M^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 4 & 13 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $c_2 = 3/16$.

> *Les colonnes de la matrice M donnent donc les probabilités respectives des événements A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} pour les lois conditionnelles $\mathbf{P}_{A_n}$, $\mathbf{P}_{B_n}$ et $\mathbf{P}_{C_n}$. Comme $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1})$ est un système complet d'événements, on en déduit que, pour chaque colonne, la somme des coefficients de M est égale à 1, ce qui se traduit matriciellement par*
>
> $$M^\top . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
>
> *Comme M et $M^\top$ ont même spectre, on sait sans aucun calcul que 1 est valeur propre de M.*

2. c. D'après ce qui précède,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et d'après **[1.b.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_n, \quad b_n = v_n, \quad c_n = w_n.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{12}{35}, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{16}{35}, \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{5}.$$

> *Ces trois limites sont positives et leur somme est égale à* 1 *: elles constituent la* ***limite en loi*** *de notre marche aléatoire. On peut remarquer que le vecteur*
>
> $$\Big(\frac{12}{35}, \frac{16}{35}, \frac{1}{5}\Big)$$
>
> *est un vecteur propre de* M *associé à la valeur propre* 1 *(ce qu'explique le théorème de Perron-Frobenius).*