Problème de Mathématiques

Référence pp1611 — Version du 31 décembre 2025

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices réelles, on note $a_{i,j}(k)$, le coefficient de A_k situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** lorsque, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, la suite réelle $\big(a_{i,j}(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. La **limite** de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \ell_{i,j} = \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}(k).$$

Partie A. Modélisation des incidents

En cas d'incident et avant intervention d'un technicien, un système électrique se trouve dans un des trois états suivants :
- État E_1 : incident non critique de type 1 ;
- État E_2 : incident non critique de type 2 ;
- État E_3 : incident critique, le système s'arrête automatiquement.

à chaque heure qui passe, l'état du système électrique est susceptible d'évoluer. Quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, on note $\pi_{i,j}$, la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j au bout d'une heure. On admet qu'il existe un réel $0 < p < 1$ tel que

$$\pi_{1,1} = \pi_{2,2} = p, \quad \pi_{1,2} = \pi_{2,3} = q$$

où $q = 1 - p$.

1. On prend comme origine des temps l'instant où le système connaît un incident de type 1 : il est donc dans l'état E_1.

1. a. Quelle est la probabilité pour qu'il soit encore dans l'état E_1 au bout de trois heures ?

1. b. Quelle est la probabilité pour qu'il soit dans l'état E_3 au bout de trois heures ?

1. c. Quelle est la probabilité pour que le système passe à l'état E_3 exactement trois heures après l'incident initial ?

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k, v_k et w_k, les probabilités pour que le système soit respectivement dans les états E_1, E_2 et E_3 au bout de k heures.

2. a. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A^k = \big(a_{i,j}(k)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Interpréter les coefficients $a_{i,j}(k)$.

Partie B. Puissances d'une matrice

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée (e_1, e_2, e_3).

3. On pose $v = e_1 + e_2 + e_3$ et on note $\mathcal{S}$, l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que la somme des coefficients de chaque colonne soit égale à 1.

3. a. Soit $M \in \mathcal{S}$. Démontrer par récurrence que $M^k \in \mathcal{S}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. b. Soit $M \in \mathcal{S}$. En calculant ${}^tMv$, démontrer que 1 est valeur propre de M.

3. c. Écrire une fonction `stochastique(M)` en langage Python dont l'argument est une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, qui retourne un booléen égal à `True` si, et seulement si, la matrice M appartient à $\mathcal{S}$.

4. On étudie la matrice A définie en (1).

4. a. Démontrer que 1 et p sont les seules valeurs propres de A. Déterminer les vecteurs propres associés.

4. b. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?

5. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un coefficient a_k, qu'on précisera, tel que

$$A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

5. b. En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie C. Diagonalisation de matrices

On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. a. Quel est le rang de u ?
6. b. Démontrer que 1 est valeur propre de u. Préciser le sous-espace propre associé.
7. En déduire que u est diagonalisable. Expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$L = PDP^{-1}.$$

8. On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & q & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. a. Calculer BC et CB.
8. b. Calculer BP et en déduire que B est diagonalisable.
8. c. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. d. Calculer C^2 et en déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = B^k + kB^{k-1}C$$

où A est la matrice définie en (1).

Partie D. Un calcul d'espérance

On revient ici à l'étude du système électrique présenté dans la première partie.
On rappelle que $0 < p < 1$ et que $q = 1 - p$.
9. Justifier l'existence de la somme

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2}$$

et calculer sa valeur.
10. On rappelle que le système est initialement dans l'état E_1 et que son état évolue d'heure en heure. On note X, le nombre d'heures qui s'écoulent avant que le système n'atteigne l'état critique E_3.
10. a. Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{P}(X = 2)$.
10. b. Démontrer que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X = k) = a_k - a_{k-1}$$

où les coefficients a_k ont été définis en (2).
10. c. En déduire $\mathbf{E}(X)$.

Solution ❀ Pannes d'un système électrique

Partie A. Modélisation des incidents

On va modéliser l'évolution du système par une suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La variable Y_k décrivant l'état du système à l'instant k, il faut comprendre que

$$\pi_{i,j} = \mathbf{P}(Y_1 = j \mid Y_0 = i).$$

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, l'application $\mathbf{P}_{[Y_0=i]}$ est une mesure de probabilité et comme

$$\big([Y_1 = 1], [Y_1 = 2], [Y_1 = 3]\big)$$

est un système complet d'événements, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \sum_{j=1}^{3} \pi_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(Y_1 = j \mid Y_0 = i) = 1$$

et donc que

$$\pi_{1,3} = \pi_{2,1} = 0.$$

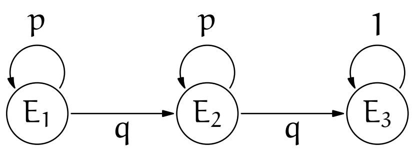
Enfin, pour décrire l'arrêt du système dès qu'il atteint l'état E_3, nous dirons qu'on reste dans l'état E_3 dès qu'on y parvient :

$$Y_n(\omega) = 3 \implies \forall\, k \geqslant n, \quad Y_k(\omega) = 3.$$

Cela se traduit en langage probabiliste par :

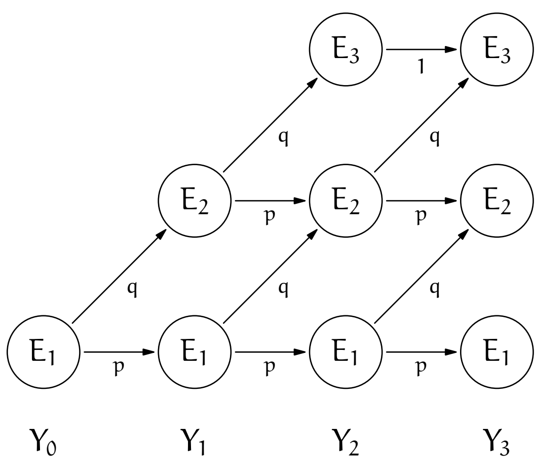
$$\begin{aligned} &\pi_{3,3} = \mathbf{P}(Y_1 = 3 \mid Y_0 = 3) = 1, \\ &\pi_{3,1} = \pi_{3,2} = 0. \end{aligned}$$

On doit traduirement graphiquement ce qui précède pour mieux le comprendre :



En résumé : à chaque heure qui passe, l'état du système peut donc rester le même ou passer dans l'état suivant : il n'y a pas d'autre possibilité !

❧ L'évolution du système au cours des trois premières heures peut alors être décrite par le schéma suivant.



❧ Enfin, *comme d'habitude avec ce genre de sujet*, la modélisation suggérée par l'énoncé est incomplète, puisque l'hypothèse de Markov homogène n'est pas formulée explicitement.

Quels que soient les entiers $1 \leqslant j_0, j_1, j_2, j_3 \leqslant 3$, la **formule des probabilités composées** nous permet de calculer la loi conjointe du vecteur (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) à partir de lois conditionnelles :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, Y_2 = j_2, Y_3 = j_3)\\ = \mathbf{P}(Y_0 = j_0)\\ \times \mathbf{P}(Y_1 = j_1 \mid Y_0 = j_0)\\ \times \mathbf{P}(Y_2 = j_2 \mid Y_0 = j_0, Y_1 = j_1)\\ \times \mathbf{P}(Y_3 = j_3 \mid Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, Y_2 = j_2).\end{aligned}$$

L'**hypothèse de Markov** simplifie cette formule et permet d'écrire simplement :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, Y_2 = j_2, Y_3 = j_3)\\ = \mathbf{P}(Y_0 = j_0)\,\mathbf{P}(Y_1 = j_1 \mid Y_0 = j_0)\\ \times \mathbf{P}(Y_2 = j_2 \mid Y_1 = j_1)\\ \times \mathbf{P}(Y_3 = j_3 \mid Y_2 = j_2)\end{aligned}$$

et l'**hypothèse de Markov homogène** permet de simplifier encore ce calcul :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_0 = j_0, Y_1 = j_1, Y_2 = j_2, Y_3 = j_3)\\ = \mathbf{P}(Y_0 = j_0)\,\mathbf{P}(Y_1 = j_1 \mid Y_0 = j_0)\\ \times \mathbf{P}(Y_1 = j_2 \mid Y_0 = j_1)\\ \times \mathbf{P}(Y_1 = j_3 \mid Y_0 = j_2).\end{aligned}$$

1. a. Calculer la probabilité pour que l'incident soit encore dans l'état E_1 trois heures après l'apparition d'un incident de type 1, c'est calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1 \mid Y_0 = 1)$$

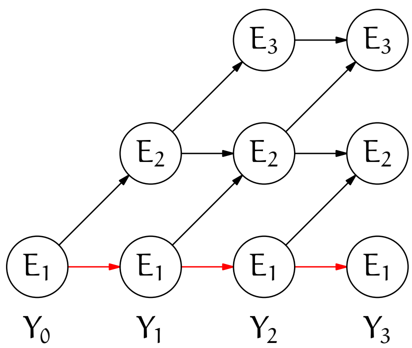
c'est-à-dire compte-tenu de l'hypothèse de Markov :

$$\mathbf{P}(Y_3 = 1 \mid Y_2 = 1)\,\mathbf{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1)\,\mathbf{P}(Y_1 = 1 \mid Y_0 = 1)$$

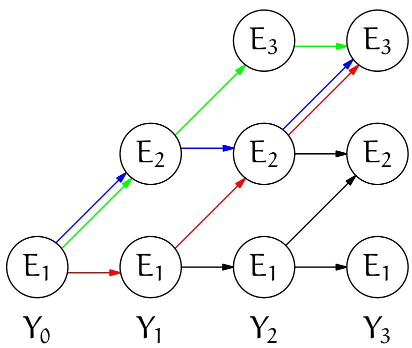
ou encore, avec l'hypothèse supplémentaire d'homogénéité :

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1 \mid Y_0 = 1)\,\mathbf{P}(Y_1 = 1 \mid Y_0 = 1)\,\mathbf{P}(Y_1 = 1 \mid Y_0 = 1),$$

probabilité qui est égale à p^3 d'après l'énoncé.



1. b. On cherche maintenant à calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y_3 = 3 \mid Y_0 = 1)$ et pour cela, il faut discuter sur les valeurs prises par Y_1 et Y_2.



D'après le schéma ci-dessus,

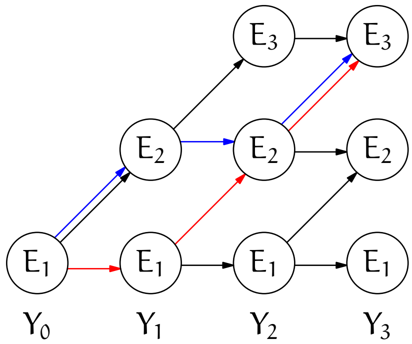
$$\begin{aligned}[Y_3 = 3] = &[Y_3 = 3, Y_2 = 3, Y_1 = 2] \\ &\sqcup [Y_3 = 3, Y_2 = 2, Y_1 = 2] \\ &\sqcup [Y_3 = 3, Y_2 = 2, Y_1 = 1]\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de Markov homogène,

$$\mathbf{P}(Y_3 = 3 \mid Y_0 = 1) = q^2 + qpq + pqq = q^2(1 + 2p).$$

1. c. On passe à l'état E_3 exactement trois heures après l'incident initial si, et seulement si, $Y_3 = 3$ (état E_3 trois heures après l'incident initial) et $Y_2 = 2$ (seul moyen pour être dans l'état E_3 à la troisième heure sans être dans cet état à la deuxième heure).

On calcule $\mathbf{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 2 \mid Y_0 = 1)$ selon le même principe qu'à la question précédente.



D'après le schéma ci-dessus,

$$\begin{aligned}&[Y_3 = 3, Y_2 = 2, Y_0 = 1] \\ &\quad = [Y_3 = 3, Y_2 = 2, Y_1 = 2, Y_0 = 1] \\ &\quad\ \sqcup [Y_3 = 3, Y_2 = 2, Y_1 = 1, Y_0 = 1]\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de Markov homogène,

$$\mathbf{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 2 \mid Y_0 = 1) = qpq + pqq = 2pq^2.$$

2. a. On décompose l'événement $[Y_{k+1} = j]$ en fonction du système complet d'événements

$$\big([Y_k = 1], [Y_k = 2], [Y_k = 3]\big).$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(Y_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_k = i)\, \mathbf{P}(Y_k = i)$$

et d'après la propriété de Markov homogène,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_{k+1} = j) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(Y_1 = j \mid Y_0 = i)\, \mathbf{P}(Y_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \pi_{i,j}\, \mathbf{P}(Y_k = i).\end{aligned}$$

On obtient donc la relation proposée avec

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \quad a_{i,j}(1) = \pi_{j,i}$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{2,1} & \pi_{3,1} \\ \pi_{1,2} & \pi_{2,2} & \pi_{3,2} \\ \pi_{1,3} & \pi_{2,3} & \pi_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}.$$

2. b. On déduit de ce qui précède que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_0 = 1) \\ \mathbf{P}(X_0 = 2) \\ \mathbf{P}(X_0 = 3) \end{pmatrix}.$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$, les règles du calcul matriciel nous disent alors que

$$\mathbf{P}(X_k = i) = a_{i,1}(k)\, \mathbf{P}(X_0 = 1) + a_{i,2}(k)\, \mathbf{P}(X_0 = 2) + a_{i,3}(k)\, \mathbf{P}(X_0 = 3)$$

tandis que, selon la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X_k = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(X_k = i \mid X_0 = j)\, \mathbf{P}(X_0 = j).$$

Ces deux identités étant vraies indépendamment de la loi de X_0 (c'est-à-dire pour tout triplet (u_0, v_0, w_0)), on peut identifier les coefficients terme à terme :

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \quad a_{i,j}(k) = \mathbf{P}(X_k = i \mid X_0 = j).$$

Autrement dit, le coefficient $a_{i,j}(k)$ représente la probabilité conditionnelle d'atteindre l'état E_i au bout de k heures sachant que le système est initialement dans l'état E_j.

Partie B. Puissances d'une matrice

3. a.
3. b.
3. c.
4. a.
4. b.
5. a.
5. b.

Partie C. Diagonalisation de matrices

6. a.
6. b.
7.
8. a.
8. b.
8. c.
8. d.

Partie D. Un calcul d'espérance

9.
10. a.
10. b.
10. c.