Problème de Mathématiques

Référence pp1614 — Version du 31 décembre 2025

Un congrès de mathématiciens se déroule au Centre Local d'Investigations Combinatoires (CLIC) de Thouars (Deux-Sèvres). Des conférences d'une durée d'une heure ont lieu dans les quatre salles du CLIC.

Le goût immodéré des participants pour les probabilités les pousse à se conduire selon les règles suivantes :

— Chaque participant change de salle après chaque exposé.

— Si un participant est dans une salle impaire, il peut aller dans l'une ou l'autre des deux salles paires avec la même probabilité q ou aller dans l'autre salle impaire avec la probabilité $2q$.

— Si un participant est dans une salle paire, il peut aller dans l'autre salle paire avec la probabilité q' ou dans l'une ou l'autre des deux salles impaires avec la même probabilié $2q'$.

On modélise le parcours d'un participant par une suite de variables aléatoires Y_n définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, dont les valeurs sont comprises entre 1 et 4 (la valeur de Y_n étant le numéro de la salle dans laquelle se trouve ce participant lors du n-ième exposé).

La loi de la variable aléatoire Y_n est représentée par le vecteur

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_n = 1) \\ \mathbf{P}(Y_n = 2) \\ \mathbf{P}(Y_n = 3) \\ \mathbf{P}(Y_n = 4) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer q et q'.

2. Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad V_{n+1} = AV_n.$$

3. Vérifier que

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{1,\ \frac{-1}{2},\ \frac{-3}{10},\ \frac{-1}{5}\right\}.$$

4. On suppose qu'au début de la journée, la moitié des participants est dans la salle 1 et l'autre moitié dans la salle 2. (Les exposés dans les salles 3 et 4 étant clairement ennuyeux.)

Calculer, à 1% près, le vecteur V_6, qui représente la répartition des participants dans chacune des quatre salles lors du sixième exposé de la journée.

Solution ❀ Le congrès des mathématiciens allés à Thouars

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction Y_{n+1} est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$, donc

$$\big([Y_{n+1} = 1],\ [Y_{n+1} = 2],\ [Y_{n+1} = 3],\ [Y_{n+1} = 4]\big)$$

est un système complet d'événements.

En admettant que l'événement $E_1 = [Y_n = 1]$ ne soit pas négligeable, $\mathbf{P}_{E_n}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, donc

$$\sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_{E_1}(Y_{n+1} = i) = 1.$$

D'après les hypothèses de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = 0\\
&\mathbf{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 2) = \mathbf{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 4) = q\\
&\mathbf{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 3) = 2q
\end{aligned}$$

donc $q = 1/4$.

De même, en admettant que $E_2 = [Y_n = 2]$ n'est pas un événement négligeable,

$$\sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_{E_2}(Y_{n+1} = i) = 1$$

et d'après les hypothèses de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 2) = 0\\
&\mathbf{P}_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1) = \mathbf{P}_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 3) = 2q'\\
&\mathbf{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 4) = q'
\end{aligned}$$

donc $q' = 1/5$.

> *On* admet *que la modélisation proposée par l'énoncé est cohérente !*

2. On cherche des réels $a_{i,j}$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4, \quad \mathbf{P}(Y_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{4} a_{i,j}\, \mathbf{P}(Y_n = j). \tag{1}$$

Comme

$$\big([Y_n = 1],\ [Y_n = 2],\ [Y_n = 3],\ [Y_n = 4]\big)$$

est un système complet d'événements, on sait que

$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{P}(Y_{n+1} = i, Y_n = j). \tag{2}$$

En comparant (1) et (2), on déduit que :

— Si l'événement $[Y_n = j]$ n'est pas négligeable, alors le réel

$$a_{i,j} = \mathbf{P}(Y_{n+1} = i \mid Y_n = j)$$

convient ;

— Si l'événement $[Y_n = j]$ est négligeable, alors la conjonction

$$[Y_{n+1} = i] \cap [Y_n = j] \subset [Y_n = j]$$

est elle aussi négligeable, donc

$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i, Y_n = j) = \mathbf{P}(Y_n = j) = 0$$

et n'importe quelle valeur de $a_{i,j}$ convient !

Les indications de l'énoncé imposent les valeurs suivantes pour les probabilités conditionnelles (en admettant qu'elles aient un sens) :

— Pour tout j,
$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = j \mid Y_n = j) = 0.$$
— Si j est impair et i pair,
$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i \mid Y_n = j) = q.$$
— Si i et j sont impairs (et différents),
$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i \mid Y_n = j) = 2q.$$
— Si j est pair et i impair,
$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i \mid Y_n = j) = 2q'.$$
— Si i et j sont pairs (et différents),
$$\mathbf{P}(Y_{n+1} = i \mid Y_n = j) = q'.$$

Par conséquent, la matrice suivante convient :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2q' & 2q & 2q' \\ q & 0 & q & q' \\ 2q & 2q' & 0 & 2q' \\ q & q' & q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \\ 10 & 8 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On écrit les matrices $20A - 20I_4$, $20A + 10I_4$, $20A + 4I_4$ et $20A + 6I_4$ pour chercher des relations de liaison entre les colonnes. On en déduit que la matrice A admet 1, $-1/2$, $-1/5$ et $-3/10$ pour valeurs propres et que les sous-espaces propres respectivement associés sont les droites vectorielles dirigées par
$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. D'après l'énoncé,
$$V_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

> *À quoi sert une base de vecteurs propres, sinon à décomposer un vecteur donné en combinaison linéaire de vecteurs propres ?*

On déduit de la relation de récurrence **[2.]** que
$$V_n = A^n V_0 = (1)^n \cdot \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(\frac{-3}{10}\right)^n \cdot \frac{5}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
pour tout $n \geqslant 1$.

Pour $n \geqslant 6$, le facteur $(3/10)^n$ est très inférieur à 1%, donc
$$V_n \approx \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$
et la répartition des participants dans les différentes salles est à peu près constante au cours du temps (bien que les participants changent tous de salle à chaque heure).