# Problème de Mathématiques

Référence pp2013 — Version du 31 décembre 2025

Un pion se déplace aléatoirement sur trois points distincts $A$, $B$ et $C$.

Initialement, on suppose que ce pion se trouve sur le point $A$.

Entre l'instant $n$ et l'instant $(n+1)$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place. Dans le cas contraire, il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

## Partie A. Modélisation

Pour représenter mathématiquement la marche aléatoire décrite ci-dessus, on considère trois suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \in \mathcal{A}, \quad C_n \in \mathcal{A}$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triplet $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements :

$$A_n \sqcup B_n \sqcup C_n = \Omega.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors

$$V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

où $p_n = \mathbf{P}(A_n)$, $q_n = \mathbf{P}(B_n)$, $r_n = \mathbf{P}(C_n)$.

**1.** Quelles valeurs attribuer à $p_0$, $q_0$ et $r_0$ ?

**2.** On pose

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comment justifier la relation suivante ?

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

*On distinguera clairement les calculs qui découlent de la théorie mathématique des choix effectués pour modéliser la marche aléatoire.*

**3.** On **admet** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3. a.** Calculer $p_n$, $q_n$ et $r_n$.

**3. b.** En déduire les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Partie B. Nombre moyen de passages en $A$

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**4. a.** Démontrer que $\mathbb{1}_{A_n}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

**4. b.** Quelle est sa loi ? Quelle est son espérance ?

**5.** Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n})$ et interpréter le résultat.

**6.** **Pour 5/2 uniquement.** En calculant

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}),$$

démontrer que les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

**Partie C. Premier passage en B**

On définit une application

$$T \,:\, \Omega \to \mathbb{N}$$

de la manière suivante.

— Si le pion ne passe jamais par le point $B$, alors $T = 0$.

— Si le pion passe au moins une fois par le point $B$, alors $T$ est l'instant auquel le pion passe pour la première fois au point $B$.

**7. a.** Démontrer que

$$[T = 0] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c.$$

**7. b.** Démontrer que

$$[T = n] = \Bigl(\bigcap_{1 \leqslant k < n} B_k^c\Bigr) \cap B_n.$$

**7. c.** En déduire que $T$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

**8.** Pour calculer la loi de la variable aléatoire $T$, on fait l'**hypothèse de Markov** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\Bigl(B_{n+1} \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Bigr) = \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c).$$

**8. a.** Exprimer $B_n^c$ en fonction de $A_n$ et $C_n$. Calculer $\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c)$.

**8. b.** En déduire la valeur de $\mathbf{P}(T = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

**8. c.** Que vaut $\mathbf{P}(T = 0)$ ?

**9.** Démontrer que la variable aléatoire $T$ est une variable aléatoire d'espérance finie et calculer cette espérance.

# Solution ❀ Marche aléatoire

## Partie A. Modélisation

**1.** Il paraît naturel d'interpréter les événements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ de la manière suivante : l'événement $A_n$ (resp. $B_n$, resp. $C_n$) est réalisé si, et seulement si, le pion occupe la position $A$ (resp. la position $B$, resp. la position $C$) à l'instant $n$.

D'après l'énoncé, le pion occupe toujours la position $A$ à l'instant $0$. Autrement dit,

$$A_0 = \Omega, \qquad B_0 = C_0 = \varnothing.$$

Par conséquent, $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

**2.** Supposons que $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$. D'après l'énoncé,

$$\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 1/2$$

(sachant que le pion occupe la position $A$ à l'instant $n$, il reste en $A$ à l'instant $(n+1)$) et

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid A_n) = \mathbf{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 1/4$$

(sachant que le pion occupe la position $A$ à l'instant $n$, il se déplace et occupe l'une des deux autres positions à l'instant suivant avec équiprobabilité). On peut alors déduire de la définition des probabilités conditionnelles que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) = 1/2\,\mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) = 1/4\,\mathbf{P}(A_n), \\ \mathbf{P}(C_{n+1}A_n) = 1/4\,\mathbf{P}(A_n). \end{cases} \tag{1}$$

On notera que ces trois relations sont évidemment vraies si $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

De manière analogue, on obtient aussi les relations suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) = 1/4\,\mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}B_n) = 1/2\,\mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}B_n) = 1/4\,\mathbf{P}(B_n) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) = 1/4\,\mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) = 1/4\,\mathbf{P}(C_n) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}C_n) = 1/2\,\mathbf{P}(C_n) \end{cases} \tag{3}$$

> *On aura noté que dans tous ces événements, l'opérateur $\cap$ est sous-entendu. C'est clairement pour me simplifier la tâche, mais qu'on ne vienne pas m'en faire le reproche : c'est Kolmogorov qui a commencé (précisément pour ce genre de calculs).*

On sait, par construction même, que $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}B_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}C_n) \\ &= 1/2\,\mathbf{P}(A_n) + 1/4\,\mathbf{P}(B_n) + 1/4\,\mathbf{P}(C_n). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la première ligne de l'égalité matricielle $V_{n+1} = MV_n$.

Des relations analogues pour $\mathbf{P}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}(C_{n+1})$, on tire de même les deuxième et troisième lignes de $V_{n+1}MV_n$.

On a ainsi rattaché la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

à la marche aléatoire du pion entre les trois positions.

*Il serait plus agréable de modéliser cette marche aléatoire par une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé, avec la donnée initiale*

$$\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1, \quad \mathbf{P}(X_0 = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 2) = 0$$

*et la relation de récurrence*

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \left| \begin{array}{ll} 1/2 & \textit{pour } i = j, \\ 1/4 & \textit{pour } i \neq j. \end{array} \right.$$

*De ce point de vue, on voit mieux que notre modélisation est incomplète. La relation de récurrence*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$$

*permet de déduire la loi de* $X_{n+1}$ *en fonction de la loi de* $X_n$ *et donc, de proche en proche, de calculer la* loi marginale de chacune des variables $X_n$. *Mais on ne peut pas en déduire la suite des* lois conjointes des vecteurs

$$(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

*(c'est la suite de ces lois qu'on appelle la* ***loi du processus aléatoire****).*
*Pour calculer ces loi conjointes, il faut appliquer la formule des probabilités composées et c'est à ce moment-là que l'*hypothèse de Markov *prend tout son sens : l'hypothèse de Markov est une hypothèse simplificatrice qui permet de calculer toutes les lois conjointes à partir des relations dont nous disposons déjà.*

**3. a.** D'après la relation de récurrence, il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_n = M^n V_0$$

donc $V_n$ est la première colonne de la matrice $M^n$. Par conséquent,

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n}, \quad q_n = r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3. b.** On en déduit immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 1/3.$$

Autrement dit, la variable aléatoire $X_n$ tend asymptotiquement vers la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$ : lorsque $n$ devient grand, le pion a environ une chance sur trois de se trouver en un quelconque des trois points $A$, $B$ et $C$.

## Partie B. Nombre moyen de passages en $A$

**4. a.** Par définition, $\mathbb{1}_{A_n}$ est une application de $\Omega$ dans $E = \{0; 1\}$. Il est clair que

$$[\mathbb{1}_{A_n} = 1] = A_n \quad \text{et que} \quad [\mathbb{1}_{A_n} = 0] = A_n^c.$$

Or $A_n \in \mathcal{A}$ par hypothèse et $A_n^c \in \mathcal{A}$ (car une tribu est stable par passage au complémentaire), donc

$$\forall\, x \in E, \quad [\mathbb{1}_{A_n} = x] \in \mathcal{A}$$

ce qui prouve que $\mathbb{1}_{A_n}$ est bien une variable aléatoire discrète de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $E = \{0; 1\}$.

**4. b.** En tant que variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1\}$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est égal à

$$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} = 1) = \mathbf{P}(A_n) = p_n.$$

Donc la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_n}$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_n)$ et on sait que son espérance est égale à $p_n$.

**5.** Comme $U_1 = \mathbb{1}_{A_1}, \dots, U_n = \mathbb{1}_{A_n}$ sont des variables aléatoires d'espérance finie, la somme $U_1 + \cdots + U_n$ est une variable aléatoire d'espérance finie et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(U_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

❧ Une somme de variables aléatoires de Bernoulli est égale au nombre de ces variables aléatoires qui prennent la valeur 1 (puisqu'une variable aléatoire de Bernoulli est égale à 0 ou à 1). Par conséquent, la somme $U_1 + \cdots + U_n$ est égale au nombre (aléatoire) d'événements réalisés parmi $A_1, \ldots, A_n$, c'est-à-dire au nombre (aléatoire) de fois que le pion passe par la position A après son départ.

L'espérance de la somme $U_1 + \cdots + U_n$ peut alors être comprise comme le *nombre moyen de passages par la position* A (il est utile de lire les titres).

**6.** Comme $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements,

$$p_n + q_n + r_n = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n) = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}) = p_n + q_n = 1 - r_n$$

et donc que

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\,\mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) = (1 - r_n)r_n > 0.$$

Cependant,

— ou bien $\omega \in C_n$ et alors $\omega \notin A_n$ et $\omega \notin B_n$, donc

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [0 + 0] \times 1 = 0$$

— ou bien $\omega \notin C_n$ et dans ce cas

$$[\mathbb{1}_{A_n}(\omega) + \mathbb{1}_{B_n}(\omega)][\mathbb{1}_{C_n}(\omega)] = [\ldots] \times 0 = 0$$

donc la variable aléatoire $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}$ est identiquement nulle et donc d'espérance nulle.

D'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n}, \mathbb{1}_{C_n}) = \mathbf{E}[(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\mathbb{1}_{C_n}] - \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})\,\mathbf{E}(\mathbb{1}_{C_n}) = 0 - (1 - r_n)r_n < 0$$

donc les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ sont corrélées.

D'après le Théorème des coalitions, si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ étaient indépendantes, les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n})$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ seraient aussi indépendantes et donc décorrélées.

Par conséquent, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_{B_n}$ et $\mathbb{1}_{C_n}$ ne sont pas indépendantes.

> *Il ne suffit pas de remarquer que ces trois variables aléatoires sont liées par une relation affine :*
>
> $$\mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{B_n} + \mathbb{1}_{C_n} = 1) = 1$$
>
> *pour conclure qu'elles ne sont pas indépendantes, mais cela met sur la voie...*

## Partie C. Premier passage en B

**7. a.** Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} T(\omega) = 0 &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \notin B_n \\ &\iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in B_n^c \\ &\iff \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c \end{aligned}$$

et par conséquent

$$[T = 0] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c.$$

> *Tous les $B_n$ appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ par définition. Une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, donc $[T = 0] \in \mathcal{A}$.*

**7. b.** Rappelons (cf. **[1.]**) pour commencer que $B_0 = \varnothing$ et donc que $B_0^c = \Omega$. Par définition de $T(\omega)$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} T(\omega) = n &\iff \omega \notin B_0, \ldots, \omega \notin B_{n-1}, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in B_1^c, \ldots, \omega \in B_{n-1}^c, \omega \in B_n \\ &\iff \omega \in \Big(\bigcap_{1 \leqslant k < n} B_k^c\Big) \cap B_n \end{aligned}$$

et donc

$$[T=n] = \Big(\bigcap_{1\leqslant k<n} B_k^c\Big) \cap B_n.$$

*Une tribu étant stable par passage au complémentaire et par intersection finie, on en déduit que $[T=n] \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

**7. c.** Par construction, T est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [T=n] \in \mathcal{A}$$

donc $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ est bien une variable aléatoire discrète.

**8. a.** Comme $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements,

$$B_n \sqcup (A_n \sqcup C_n) = \Omega$$

donc $B_n^c = A_n \sqcup C_n$ et par conséquent

$$\mathbf{P}(B_n^c) = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(C_n).$$

On en déduit que

$$B_{n+1} \cap B_n^c = (B_{n+1} \cap A_n) \sqcup (B_{n+1} \cap C_n)$$

et donc que, par additivité de la mesure **P** :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c) &= \mathbf{P}(B_{n+1}A_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}C_n) = \tfrac{1}{4}\,\mathbf{P}(A_n) + \tfrac{1}{4}\,\mathbf{P}(C_n) && \text{(par [2.])}\\ &= \tfrac{1}{4}\,\mathbf{P}(B_n^c).\end{aligned}$$

On en déduit enfin que

$$\mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) = \frac{\mathbf{P}(B_{n+1}B_n^c)}{\mathbf{P}(B_n^c)} = \frac{1}{4}.$$

**8. b.** On reprend l'expression de $[T=k]$ établie au **[7.b.]** et on applique la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T=k) = \mathbf{P}(B_n \mid B_{n-1}^c \cdots B_1^c) \times \mathbf{P}(B_{n-1}^c \mid B_{n-2}^c \cdots B_1^c) \times \cdots\\ \times \mathbf{P}(B_3^c \mid B_2^c B_1^c) \times \mathbf{P}(B_2^c \mid B_1^c) \times \mathbf{P}(B_1^c).\end{aligned}$$

***Rappel :*** *cette formule est* $\boxed{\text{la}}$ *règle de calcul à appliquer pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements.*

L'hypothèse de Markov nous permet de simplifier cette expression, car, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(B_{n+1}^c \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big) &= 1 - \mathbf{P}\Big(B_{n+1} \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\Big)\\ &= 1 - \mathbf{P}(B_{n+1} \mid B_n^c) && \text{(Markov)}\\ &= \tfrac{3}{4}. && \text{(par [8.a.])}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathbf{P}(T=k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{n-2} \cdot \mathbf{P}(B_1^c).$$

Or $\mathbf{P}(B_1^c) = 1 - q_1 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T=k) = \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{k-1}.$$

**8. c.** Comme la famille $([T=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est, par construction, un système complet d'événements et que la mesure de probabilité **P** est σ-additive,

$$\mathbf{P}(T=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T=k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{k-1} = 0.$$

***Variante.*** *On peut aussi remarquer que* $[\mathsf{T}=0]$ *est l'intersection d'une suite décroissante d'événements :*

$$[\mathsf{T}=0]=\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_1^c B_2^c \cdots B_n^c.$$

*Par continuité décroissante de* $\mathbf{P}$*,*

$$\mathbf{P}(\mathsf{T}=0)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(B_1^c B_2^c \cdots B_n^c)$$

*et d'après les calculs menés au* ***[8.b.]****, cette limite est nulle.*

**9.** La variable aléatoire $\mathsf{T}$ a même loi qu'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1/4$ (seule nuance : une variable aléatoire géométrique n'est jamais nulle alors que $\mathsf{T}$ prend la valeur $0$ avec probabilité nulle). Donc $\mathsf{T}$ est une variable aléatoire d'espérance finie et $\mathbf{E}(\mathsf{T})=4$.