Problème de Mathématiques

Référence pp2104 — Version du 31 décembre 2025

Partie A. Étude d'un endomorphisme

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = \frac{1}{3} \cdot (e_2 + e_3), \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3} \cdot e_1.$$

1. Citer précisément le théorème qui affirme que f est bien défini.

2. Écrire la matrice M qui représente f dans la base $\mathscr{B}$.

3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Ker}(3f - 2I)$, une base de $\operatorname{Ker}(f + I)$ et une base de $\operatorname{Ker}(3f + 2I)$.

4. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. a. Justifier, *avec le moins de calculs possibles,* que la matrice P est inversible.

4. b. Déterminer, sans autres calculs, la matrice diagonale D telle que

$$M = PDP^{-1}.$$

4. c. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{4} \cdot Q$.

4. d. Démontrer par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}.$$

4. e. En déduire la première colonne de la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie B. Étude d'un processus aléatoire

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise.

On **admet** qu'il existe une suite $(X_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui modélisent ces tirages de la manière suivante.

- La valeur de la variable aléatoire X_1 est le numéro de la première boule tirée.
- Si X_k a pris la valeur 1, alors la valeur de X_{k+1} est le numéro de la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage.
- Si X_k a pris une valeur $j \neq 1$, alors la valeur de X_{k+1} est égale à j si la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage est la boule qui porte le numéro j et la valeur de X_{k+1} est égale à 1 dans le cas contraire.

5. Quelle est la loi de X_1 ?

6. Démontrer que

$$\big([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\big)$$

est un système complet d'événements.

7. On pose

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_k = 1) \\ \mathbf{P}(X_k = 2) \\ \mathbf{P}(X_k = 3) \end{pmatrix}.$$

7. a. En s'inspirant de la description du processus aléatoire, déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$$

en fonction des entiers $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

7. b. En déduire une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k.$$

On écrira cette matrice sous la forme $M + rI_3$ pour un réel r bien choisi.

8. a. En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}\cdot\big(1 + (-{}^1\!/\!_3)^k\big),$$
$$\mathbf{P}(X_k = 2) = \mathbf{P}(X_k = 3) = \frac{1}{4}\cdot\big(1 - (-{}^1\!/\!_3)^k\big).$$

8. b. Calculer la limite lorsque k tend vers $+\infty$ de la probabilité $\mathbf{P}(X_k = i)$ en fonction de $1 \leqslant i \leqslant 3$.

9. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Partie C. Simulation informatique

Extrait de la documentation du module `numpy.random`

`random_integers(low, high=None, size=None)`

Return random integers between `low` *and* `high`*, inclusive.*

Return random integers from the discrete uniform *distribution in the closed interval* `[low, high]`*. If* `high` *is* `None` *(the default), then results are from* `[1, low]`*.*

Parameters

- `low` *: int*
  Lowest (signed) integer to be drawn from the distribution (unless `high=None`*, in which case this parameter is the **highest** such integer).*
- `high` *: int, optional*
  If provided, the largest (signed) integer to be drawn from the distribution (see above for behavior if `high=None`*).*
- `size` *: int or tuple of ints, optional*
  Output shape. If the given shape is, e.g., (m, n, k)*, then* $m \times n \times k$ *samples are drawn. Default is* `None`*, in which case a single value is returned.*

Returns

- `out` *: int or ndarray of ints*
  `size`*-shaped array of random integers from the appropriate distribution, or a single such random int if* `size` *not provided.*

---

10. Écrire un code qui simule N tirages successifs dans l'urne.

11. On suppose que les résultats de N tirages successifs sont rassemblés dans un tableau numpy `T`. Écrire une fonction `processus` telle que l'exécution de `processus(T)` retourne les valeurs $X_1, \ldots, X_N$ associées à ces tirages sous forme d'une liste.

Solution ❀ Chaîne de Markov

Partie A. Étude d'un endomorphisme

1. Comme $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une **base** de $\mathbb{R}^3$, quelle que soit la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$, il existe un, et un seul, endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 3, \qquad f(e_k) = \varepsilon_k.$$

2. Les **colonnes** de M décrivent les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles, donc le rang de f est *au moins* égal à 2. Les deux dernières colonnes de M sont proportionnelles, donc le rang de f est *au plus* égal à 2.

Le rang de f est donc égal à 2, son noyau est une droite vectorielle (Théorème du rang) et comme les deux dernières colonnes de M sont égales,

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot (e_2 - e_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, -1).$$

❧ D'après **[2.]**,

$$3M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On remarque cette fois que les colonnes de la matrice vérifient

$$2C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

et un raisonnement analogue au précédent nous donne

$$\operatorname{Ker}(3f - 2I) = \mathbb{R} \cdot (2, 1, 1).$$

❧ De même,

$$M + I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'opération

$$C_1 \leftarrow 3C_1 - C_2 - C_3$$

nous donne la matrice

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

qui est clairement inversible. Donc la matrice $M + I_3$ est inversible et le noyau de $(f + I)$ est réduit au vecteur nul.

❧ De même,

$$3M + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice vérifient

$$2C_1 - C_2 - C_3 = 0$$

donc $\operatorname{Ker}(3f + 2I) = \mathbb{R} \cdot (2, -1, -1)$.

4. a. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ transforme P en

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles (le rang est au moins égal à 2) et la première colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux autres (le rang est strictement supérieur à 2), donc la matrice P est inversible.

> ***Variante.*** *Les colonnes de* P *représentent des vecteurs propres de* f *pour des valeurs propres deux à deux distinctes* (0, $^2/_3$ *et* $-^2/_3$)*, donc elles forment une famille libre et comme* P *est une matrice carrée, elle est bien inversible.*

4. b. D'après l'énoncé, la matrice D vérifie

$$D = P^{-1}MP.$$

On reconnaît ici la formule de changement de base : comme P est inversible, il existe une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et la matrice D représente alors l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{C}$.

D'après la matrice P,

$$\varepsilon_1 = (2,1,1), \quad \varepsilon_2 = (-2,1,1), \quad \varepsilon_3 = (0,1,-1).$$

D'après **[3.]**, on a

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= {}^2/_3 \cdot \varepsilon_1 = {}^2/_3 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) &= -{}^2/_3 \cdot \varepsilon_2 = 0 \cdot \varepsilon_1 - {}^2/_3 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) &= 0 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$D = \begin{pmatrix} ^2/_3 & 0 & 0 \\ 0 & -^2/_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. c. Il suffit de calculer le produit PQ et de constater qu'il est égal à I_3.

REMARQUE.— Il est important de *vraiment* calculer ce produit — un professeur distrait ou taquin pourrait avoir plus ou moins volontairement introduit une erreur de signe dans les coefficients de Q...

4. d. Pour $k = 0$, la propriété est évidente :

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$$

On suppose **[HR]** qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$M^k = PD^kP^{-1}.$$

D'après **[HR]** et **[4.b.]**

$$\begin{aligned} M^{k+1} = M^kM &= (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^kI_3DP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}.$$

4. e. Comme D est diagonale,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad D^k = \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \operatorname{Diag}(1, (-1)^k, 0).$$

On en déduit que

$$PD^k = \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \begin{pmatrix} 2 & 2.(-1)^{k+1} & 0 \\ 1 & (-1)^k & 0 \\ 1 & (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de M^k est obtenue en multipliant M^k par E_1 (le premier vecteur de la base canonique), donc en multipliant PD^k par la première colonne de P^{-1} :

$$M^kE_1 = (PD^kP^{-1})E_1 = (PD^k)(P^{-1}E_1).$$

On trouve

$$(PD^k)\Big(\frac{1}{4}QE_1\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k \begin{pmatrix} 2[1+(-1)^k] \\ 1-(-1)^k \\ 1-(-1)^k \end{pmatrix}.$$

Il est sage (même si ce n'est pas demandé) de présenter le résultat en discutant sur la parité de k.

Si k est pair, alors la première colonne de M^k est égale à

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et si k est impair, alors la première colonne de M^k est égale à

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Partie B. Étude d'un processus aléatoire

5. La loi de X_1 est une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3\}$ (= l'ensemble des valeurs possibles). L'énoncé ne fournissant aucune information qui s'y oppose, **il est raisonnable de supposer** que la loi de X_1 est la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

6. Comme X_k est une **variable aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, alors

$$\big([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3]\big)$$

est un système complet d'événements (famille d'événements deux à deux disjoints dont l'union est égale à l'univers Ω).

7. a. Pour que les probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$$

aient un sens, nous allons **supposer** que

$$\mathbf{P}(X_k = 1) > 0,\ \mathbf{P}(X_k = 2) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_k = 3) > 0.$$

❧ D'après l'énoncé, si X_k a pris la valeur 1, alors X_{k+1} prend la valeur de la boule tirée ensuite. Sans précision supplémentaire, on peut supposer que les trois valeurs possibles pour X_{k+1} sont alors équiprobables et on **convient** donc de

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = \mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1) = \mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 1) = \frac{1}{3}.$$

❧ Si X_k a pris une valeur $j \neq 1$, il y a une chance sur trois pour que la boule numérotée j apparaisse au tirage suivant et deux chances sur trois pour que ce soit une autre boule (toujours selon notre hypothèse d'équiprobabilité).

Donc on **convient** de ce qui suit : pour $j = 2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2) &= 2/3 && \text{(autre boule)} \\ \mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) &= 1/3 && \text{(boule 2)} \\ \mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2) &= 0 \end{aligned}$$

et pour $j = 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 3) &= 2/3 && \text{(autre boule)} \\ \mathbf{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 3) &= 0 \\ \mathbf{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 3) &= 1/3. && \text{(boule 3)} \end{aligned}$$

7. b. Comme on connaît un système complet d'événements, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}([X_{k+1} = i] \cap [X_k = j])$$

et on retrouve ainsi la Formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)\,\mathbf{P}(X_k = j).$$

(Si $\mathbf{P}(X_k = j) = 0$, alors $\mathbf{P}([X_{k+1} = i] \cap [X_k = j]) = 0$ et le fait que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$ ne soit pas définie est alors sans importance.)

On cherche ici une matrice $A = (a_{i,j})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad \mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\,\mathbf{P}(X_k = j).$$

D'après la Formule des probabilités totales et **[7.a.]**, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

convient. On remarque alors que

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M + \frac{1}{3}I_3.$$

REMARQUE.— Il vaut mieux ne pas laisser croire que cette matrice est la seule possible : ce n'est pas demandé par l'énoncé et ce n'est pas simple à établir...

8. a. D'après **[7.b.]**, il est clair que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad U_k = A^{k-1}U_1$$

et d'après **[5.]**,

$$U_1 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad U_k = A^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

❧ On a remarqué plus haut que

$$A = M + \frac{1}{3}I_3.$$

On déduit de **[4.b.]** que

$$P^{-1}AP = P^{-1}MP + \frac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

et donc que

$$A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^k \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Un calcul analogue à celui du **[4.e.]** nous donne alors

$$A^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\big[1 + (-1/3)^k\big] \\ 1 - (-1/3)^k \\ 1 - (-1/3)^k \end{pmatrix}$$

cqfd.

8. b. On en déduit immédiatement que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 1) = 1/2, \qquad \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 2) = 1/4, \qquad \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(X_k = 3) = 1/4.$$

9. Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ étaient indépendantes, alors en particulier X_1 et X_2 seraient indépendantes et dans ce cas,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1).$$

Or $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = 1/3$ par **[7.a.]** et

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}(1 + 1/9) = 5/9$$

par **[8.a.]**

Donc les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes et, a fortiori, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas indépendantes.

Partie C. Simulation informatique

10. On importe la fonction `random_integers` du module `numpy.random` et on l'utilise en suivant les indications de la documentation.

```
from numpy.random import random_integers as rd

def tirages(N):
  T = rd(3, size=N)
  return T
```

11.

```
def processus(T):
  N = len(T)
  X = []
  X.append(T[0])              # Première boule tirée
  for k in range(N-1):        # T_{k+1} = (k+1)-ième boule tirée
    t = T[k+1]
    if (X[k]==1):             # si X_k = 1
      X.append(t)             # alors X_{k+1} = T_{k+1}
    else:
      j = X[k]                # si X_k = j ≠ 1
    if (t==j):                # et si T_{k+1} = j,
      X.append(j)             # alors X_{k+1} = j
    else:                     # mais si T_{k+1} ≠ j,
      X.append(1)             # alors X_{k+1} = 1
  return X
```