

## Problème de Mathématiques

Référence pp1717 — Version du 31 décembre 2025

---

On considère des variables aléatoires réelles

$$X_1, X_2, \dots, X_p$$

définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . On suppose que toutes ces variables aléatoires admettent un moment d'ordre deux et on considère la **matrice de covariance**  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma = (\mathbf{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}).$$

On suppose que l'espace  $\mathbb{R}^p$  est muni de sa *structure euclidienne canonique*.

### 1. Questions de cours

1. a. Quand dit-on qu'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admet un moment d'ordre deux?
1. b. Pourquoi une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre deux admet-elle aussi une variance?
1. c. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux. Quel théorème permet de démontrer que le produit  $XY$  est d'espérance finie? En déduire que la covariance  $\mathbf{Cov}(X, Y)$  existe.
1. d. Donner un exemple de variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux.
1. e. Donner un exemple de variable aléatoire n'admettant pas un moment d'ordre deux.
2. Démontrer qu'il existe  $p$  nombres réels

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$$

et une matrice orthogonale  $Q \in O_p(\mathbb{R})$  tels que la matrice  $Q \cdot \Gamma \cdot Q^\top$  soit égale à la matrice

$$\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p).$$

3. Soient  $c = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{R}^p$  et

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

3. a. Exprimer  $\|c\|^2$  en fonction de la matrice colonne  $C$ .
3. b. Démontrer que

$$\mathbf{v} \left( \sum_{k=1}^p c_k X_k \right) = C^\top \cdot \Gamma \cdot C.$$

3. c. En déduire que les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont tous positifs.
3. d. Démontrer que

$$\lambda_1 \|c\|^2 \leq C^\top \cdot \Gamma \cdot C \leq \lambda_p \|c\|^2.$$

3. e. Démontrer que :

$$C^\top \cdot \Gamma \cdot C = \lambda_1 \|c\|^2 \iff \Gamma \cdot C = \lambda_1 C.$$

On peut démontrer de même que :

$$C^\top \cdot \Gamma \cdot C = \lambda_p \|c\|^2 \iff \Gamma \cdot C = \lambda_p C$$

et on *admettra* cette équivalence.

4. On conserve les notations des questions précédentes, on suppose que  $p = 3$  et que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\rho$  est un réel positif.

4. a. Démontrer que  $\rho \leq 1$ .
4. b. Expliciter les réels  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ , ainsi qu'une matrice  $Q$  convenable.
4. c. Expliciter un vecteur *unitaire*  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que la quantité

$$\mathbf{v} \left( \sum_{k=1}^3 c_k X_k \right)$$

soit minimale.

4. d. Quel est l'intérêt *pratique* de la question précédente?

## Solution ✿ Matrice de covariance

**1. a.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admet un moment d'ordre deux si, et seulement si, la famille

$$(k^2 \mathbf{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$$

est sommable.

**1. b.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq k \mathbf{P}(X = k) \leq k^2 \mathbf{P}(X = k).$$

Si la variable aléatoire  $X$  admet un moment d'ordre deux, alors elle admet aussi un moment d'ordre un (ou : elle est d'espérance finie), donc

$$[X - \mathbf{E}(X)]^2 = X^2 - 2 \mathbf{E}(X) X + \mathbf{E}(X)^2$$

est une variable aléatoire d'espérance finie en tant que combinaison linéaire de variables d'espérance finie.

Ainsi, toute variable aléatoire qui admet un moment d'ordre deux admet aussi une variance.

**1. c.** D'après l'inégalité de Schwarz, si  $X$  et  $Y$  admettent un moment d'ordre deux, alors le produit  $XY$  est une variable aléatoire d'espérance finie. Par conséquent,

$$[X - \mathbf{E}(X)][Y - \mathbf{E}(Y)] = XY - \mathbf{E}(X) Y - \mathbf{E}(Y) X + \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$$

est une combinaison linéaire de variables aléatoires d'espérance finie et la covariance de  $X$  et  $Y$  est bien définie par :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}(X)][Y - \mathbf{E}(Y)]).$$

**1. d.** Toute variable aléatoire bornée (loi de Dirac, loi de Bernoulli, loi binomiale) admet un moment d'ordre deux et, d'après le cours, toute variable suivant une loi géométrique ou une loi de Poisson admet aussi un moment d'ordre deux (bien qu'elle ne soit pas bornée).

**1. e.** Comme  $\sum 1/k^2$  est une série convergente de terme général positif et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

il existe une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$\mathbf{P}(X = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}.$$

Comme la série  $\sum k^2 \mathbf{P}(X = k)$  diverge (grossièrement), cette variable aléatoire n'admet pas un moment d'ordre deux.

**2.** Par définition, la matrice  $\Gamma$  est une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1} \Gamma P$  soit une matrice diagonale réelle. On choisit  $Q = P^{-1}$  et comme  $P$  est orthogonale,  $Q = P^T$ , donc  $Q^T = P = Q^{-1}$ .

**3. a.** Par définition de la structure euclidienne canonique et du produit matriciel,

$$\|c\|^2 = \sum_{k=1}^p c_k^2 = C^T \cdot C.$$

**3. b.** Par bilinéarité de la covariance,

$$\mathbf{V} \left( \sum_{k=1}^p c_k X_k \right) = \mathbf{Cov} \left( \sum_{i=1}^p c_i X_i, \sum_{j=1}^p c_j X_j \right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p c_i c_j \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = C^T \cdot \Gamma \cdot C.$$

**3. c.** Soit  $\lambda$ , une valeur propre de  $\Gamma$ . En prenant pour matrice colonne  $C$  un vecteur propre de  $\Gamma$  associé à  $\lambda$ , on obtient

$$\mathbf{V} \left( \sum_{k=1}^p c_k X_k \right) = C^T \cdot \Gamma \cdot C = C^T \cdot (\lambda \cdot C) = \lambda C^T \cdot C = \lambda \|c\|^2.$$

La variance d'une variable aléatoire est un réel positif; la norme d'un vecteur *non nul* (puisqu'il s'agit d'un *vecteur propre*) est un réel strictement positif; par conséquent,

$$\lambda = \frac{1}{\|c\|^2} \mathbf{v} \left( \sum_{k=1}^p c_k X_k \right) \geq 0.$$

Donc

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad \lambda_k \geq 0.$$

**3. d.** On reprend les notations du [2.] : comme  $Q$  est orthogonale, alors  $Q^T \cdot Q = I_p$  et

$$C^T \cdot \Gamma \cdot C = C^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot \Gamma \cdot Q^T \cdot Q \cdot C = (QC)^T \cdot (Q \cdot \Gamma \cdot Q^T) \cdot (QC) = (QC)^T \cdot \Delta \cdot (QC).$$

En notant

$$QC = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix},$$

on en déduit que

$$C^T \cdot \Gamma \cdot C = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k^2$$

et on déduit de [3.a.] que

$$\sum_{k=1}^p u_k^2 = (QC)^T \cdot (QC) = C^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot C = C^T \cdot C = \|c\|^2$$

puisque la matrice  $Q$  est orthogonale.

Pour tout  $1 \leq k \leq p$ ,

$$\lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_p$$

donc

$$\lambda_1 u_k^2 \leq \lambda_k u_k^2 \leq \lambda_p u_k^2$$

et en sommant sur  $k$  :

$$\lambda_1 \|c\|^2 \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k^2 \leq \lambda_p \|c\|^2$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \|c\|^2 \leq C^T \cdot \Gamma \cdot C \leq \lambda_p \|c\|^2.$$

**3. e.** Si  $\Gamma \cdot C = \lambda_1 C$ , alors

$$C^T \cdot \Gamma \cdot C = C^T \cdot (\lambda_1 C) = \lambda_1 C^T \cdot C = \lambda_1 \|c\|^2.$$

• Réciproquement, d'après la question précédente, la différence

$$C^T \cdot \Gamma \cdot C - \lambda_1 \|c\|^2 = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k^2 - \sum_{k=1}^p \lambda_1 u_k^2 = \sum_{k=1}^p (\lambda_k - \lambda_1) u_k^2$$

est une somme de réels *positifs* : si cette différence est nulle, c'est que tous les termes sont nuls, c'est-à-dire

— Ou bien  $\lambda_k = \lambda_1$  ;

— Ou bien  $\lambda_k > \lambda_1$  et dans ce cas  $u_k = 0$ .

On a donc

$$\Delta(QC) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \star & \\ & & & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1(QC).$$

En multipliant à gauche par  $Q^T$ , on en déduit que

$$\Gamma \cdot C = (Q^T \cdot \Delta \cdot Q) \cdot C = \lambda_1 (Q^T \cdot Q \cdot C) = \lambda_1 C.$$

• On a ainsi démontré que  $C^\top \cdot \Gamma \cdot C = \lambda_1 \|c\|^2$  si, et seulement si, la matrice colonne  $C$  appartient au sous-espace propre  $\text{Ker}(\Gamma - \lambda_1 I_p)$ .

4. a. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}$$

et d'après  $\Gamma$ ,

$$\rho = |\text{Cov}(X, Y)| \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1,$$

donc  $|\rho| \leq 1$ .

4. b. La matrice  $\Gamma$  est symétrique réelle, donc diagonalisable...

• En notant (comme d'habitude)  $J$ , la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1,

$$\Gamma = (1 - \rho)I_3 + \rho J.$$

Le rang de  $J$  est égal à 1 et son noyau a pour équation  $[x + y + z = 0]$ , donc  $(1 - \rho)$  est une valeur propre de  $\Gamma$  et le sous-espace propre associé est le plan  $[x + y + z = 0]$ .

Par ailleurs,

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $(1 - \rho) + 3\rho = 1 + 2\rho$  est une valeur propre de  $\Gamma$  et le sous-espace propre associé est la droite dirigée par  $(1, 1, 1)$ .

• Comme  $\rho \geq 0$ , alors

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 - \rho \leq 1 + 2\rho = \lambda_3.$$

D'après [2.], les colonnes de  $Q^\top = P$  constituent une base orthonormée de vecteurs propres de  $\Gamma$ . On peut donc choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

convient.

4. c. D'après [3.b.], [3.d.] et [3.e.], la variance considérée est minimale si, et seulement si,  $\Gamma C = \lambda_1 C$ . D'après la question précédente, tout vecteur  $c = (x, y, z)$  tel que

$$x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

convient, comme par exemple :

$$(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, 1).$$

4. d. Considérons un plan de  $\mathbb{R}^3$  représenté par une équation cartésienne (dite *équation normale*) :

$$ax + by + cz = K$$

où  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  et  $K = a \mathbf{E}(X_1) + b \mathbf{E}(X_2) + c \mathbf{E}(X_3)$ . Dans ces conditions, avec  $(c_1, c_2, c_3) = (a, b, c)$ ,

$$\mathbf{V} \left( \sum_{k=1}^3 c_k X_k \right) = \mathbf{E} \left[ (aX_1 + bX_2 + cX_3 - K)^2 \right]$$

et minimiser la variance revient alors à trouver *un plan des moindres carrés* : les triplets aléatoires  $(X_1, X_2, X_3)$  sont aussi peu dispersés que possible de part et d'autre d'un tel plan.