Problème de Mathématiques

Référence pp1818 — Version du 31 décembre 2025

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et φ_x, la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_x(t) = \max(x, t).$$

1. a. Donner une représentation graphique de φ_x.
1. b. Calculer

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)\, dt.$$

1. c. Donner une représentation graphique de Φ.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on pose

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \int_0^1 \max\big(X(\omega), t\big)\, dt.$$

2. Démontrer que Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
3. On suppose que X suit une loi géométrique. Déterminer la loi de Y.
4. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $0 < p < 1$. On notera $q = 1 - p$.
4. a. Rappeler la loi de X et donner (sans démonstration) son espérance et sa variance.
4. b. Déterminer la loi de Y.
5. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $E = \big\{-1;\ 0;\ 1/2;\ 2\big\}$ et que

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

5. a. Quelle est la valeur de $\mathbf{P}(X = 1/2)$?
5. b. Déterminer la loi de Y. En déduire l'espérance de Y.
5. c. On pose

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

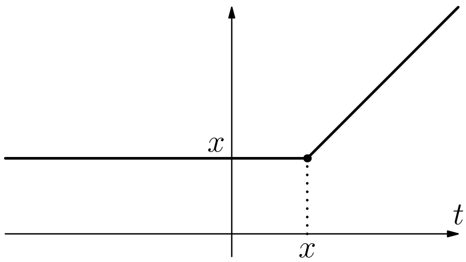
Démontrer que Z est une variable aléatoire. Déterminer la loi de Z.
5. d. Démontrer que le coefficient de corrélation

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}$$

est strictement positif.

Solution ❀ Calcul de covariance

1. a. Pour $t \leqslant x$, on a $\varphi_x(t) = x$ (= constante) et pour $t \geqslant x$, on a $\varphi_x(t) = t$ (= première bissectrice).

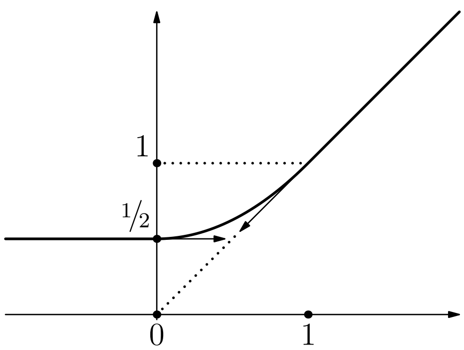


1. b. On distingue trois cas :
- Si $x \leqslant 0$, alors $\varphi_x(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$ et
$$\Phi(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$
- Si $x \geqslant 1$, alors $\varphi_x(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$ et
$$\Phi(x) = \int_0^1 x\,dt = x.$$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on applique la relation de Chasles :
$$\Phi(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = \frac{1+x^2}{2}.$$

1. c. Il est clair que Φ est continue sur $]-\infty,0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Par ailleurs, d'après les calculs précédents,
$$\Phi(0-) = \Phi(0+) = \frac{1}{2} = \Phi(0)$$
donc Φ est continue en $x = 0$ et
$$\Phi(1-) = \Phi(1+) = 1 = \Phi(1)$$
donc Φ est continue en $x = 1$. La fonction Φ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De même, Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et, toujours d'après les calculs précédents,
$$\begin{aligned} \forall\, x < 0, &\quad \Phi'(x) = 0 \\ \forall\, 0 < x < 1, &\quad \Phi'(x) = x \\ \forall\, x > 1, &\quad \Phi'(x) = 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi'(0-) = \Phi'(0+) = 0$ et que $\Phi'(1-) = \Phi'(1+) = 1$, donc la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$).



2. Comme X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $Y = \Phi(X)$, la fonction Y est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On peut aussi remarquer (en prévision de la suite...) que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad [Y = y] = \big[X \in \Phi^{-1}(\{y\})\big]$$

et donc que

$$\begin{aligned} [Y = y] &= \varnothing && \text{si } y < 1/2 \\ &= [X \leqslant 0] && \text{pour } y = 1/2 \\ &= [X = \sqrt{2y-1}] && \text{pour } 1/2 < y \leqslant 1 \\ &= [X = y] && \text{pour } y \geqslant 1 \end{aligned}$$

3. Si X suit une loi géométrique, alors $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc $Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega)$. On a donc : $Y = X$ (égalité des variables aléatoires, et pas seulement égalité en loi !), donc en particulier Y suit la même loi géométrique que X.

4. a. Cf cours !

Je rappelle quand même que donner la loi d'une variable aléatoire discrète, c'est d'abord donner l'ensemble des valeurs possibles pour cette variable et ensuite donner les fréquences avec lesquelles ces valeurs apparaissent.

4. b. Comme X prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$, on distingue deux cas :

— Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \Phi(0) = 1/2$.

— Sinon, alors $X(\omega) \geqslant 1$, donc $Y(\omega) = X(\omega)$.

Donc Y est une variable aléatoire à valeurs dans

$$\{1/2, 1, 2, \dots, n\}$$

et d'après la discussion précédente,

$$\begin{gathered} [Y = 1/2] = [X = 0] \\ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad [Y = k] = [X = k]. \end{gathered}$$

On en déduit que $\mathbf{P}(Y = 1/2) = q^n$ et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

5. a. Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E, la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = x)\big)_{x \in E}$$

est un système complet d'événements, donc

$$1 = \sum_{x \in E} \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \mathbf{P}(X = 1/2) + \frac{1}{3}$$

donc $\mathbf{P}(X = 1/2) = 5/12$.

5. b. Étudions les valeurs prises par $Y = \Phi(X)$ en fonction des valeurs prises par X :

— Si $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$.

— Si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = 5/8$.

— Si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 2$.

On déduit de cette discussion que Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $F = \{1/2; 5/8; 2\}$ et que

$$\begin{gathered} [Y = 1/2] = [X = -1] \sqcup [X = 0], \\ [Y = 5/8] = [X = 1/2], \quad [Y = 2] = [X = 2]. \end{gathered}$$

La discussion a établi des inclusions d'ensembles. Comme on a envisagé tous les cas possibles (= toutes les valeurs possibles pour X) et que ces cas s'excluaient mutuellement (puisque X ne peut pas prendre deux valeurs différentes en même temps), on a de fait établi les inclusions réciproques : on a bien démontré les égalités !

On en déduit que

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(Y = 5/8) = \frac{5}{12}, \quad \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}.$$

❧ Comme la variable aléatoire Y ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs, elle est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{y \in F} y\, \mathbf{P}(Y = y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{101}{96}.$$

5. c. En tant que produit de deux variables aléatoires discrètes, Z est une variable aléatoire discrète.

❧ Étudions les valeurs possibles de Z en discutant sur la valeur de X.

— Si $X(\omega) = -1$, alors $Y(\omega) = 1/2$ et $Z(\omega) = -1/2$.

— Si $X(\omega) = 0$, alors $Z(\omega) = 0$.

— Si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = 5/8$ et $Z(\omega) = 5/16$.

— Si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 2$ et $Z(\omega) = 4$.

On en déduit que Z est une variable aléatoire discrète à valeurs dans

$$G = \left\{ \frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{5}{16},\ 4 \right\}$$

et que

$$[Z = -1/2] = [X = 1] \qquad [Z = 0] = [X = 0]$$
$$[Z = 5/16] = [X = 1/2] \qquad [Z = 4] = [X = 2]$$

(pour les raisons présentées plus haut). On en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = -1/2) = 1/8, \qquad \mathbf{P}(Z = 0) = 1/8,$$
$$\mathbf{P}(Z = 5/16) = 5/12, \qquad \mathbf{P}(Z = 4) = 1/3.$$

5. d. On déduit de la loi de X que

$$\mathbf{E}(X) = \frac{-1}{8} + 0 + \frac{5}{24} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

et de la loi de Z que

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{-1}{16} + 0 + \frac{25}{16 \cdot 12} + \frac{4}{3} = \frac{269}{4 \cdot 48}.$$

(Personne ne demande de calculer le dénominateur !)

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) = \frac{269}{4 \cdot 48} - \frac{3}{4} \cdot \frac{101}{96} = \frac{2 \cdot 269 - 3 \cdot 101}{4 \cdot 96} > 0.$$

(Personne ne demande de calculer explicitement la covariance : on ne cherche que son *signe* !)

> *Le signe de la covariance* $\mathbf{Cov}(X, Y)$ *est aussi le signe du coefficient de corrélation linéaire de* X *et* Y*. Comme* Y *est par construction une fonction* croissante *de* X*, la droite de régression de* Y *en fonction de* X *est sans aucun doute possible croissante, donc on pouvait prévoir sans aucun calcul que cette covariance était positive.*