# Problème de Mathématiques

Référence pp1915 — Version du 31 décembre 2025

Dans tout le sujet, $N$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les variables aléatoires étudiées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On notera $E = [\![1, N]\!]$, l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre 1 et $N$.

Quels que soient les entiers $k, n \geqslant 1$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On rappelle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_2(n) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

**1.** Soit $k \geqslant 1$, un entier. Démontrer que

$$\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

**2.** Soit $X$, une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = [\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant i).$$

On considère une famille $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, qui suivent toutes la loi uniforme sur $E$ :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}.$$

On pose alors

$$\begin{aligned}\forall\, \omega \in \Omega, \quad U_k(\omega) &= \min\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\},\\ V_k(\omega) &= \max\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\}.\end{aligned}$$

**3. a.** Démontrer que

$$\forall\, i \in E, \quad [U_k \geqslant i] \in \mathcal{A} \quad \text{et que} \quad [V_k \leqslant i] \in \mathcal{A}.$$

**3. b.** En déduire que

$$\forall\, i \in E, \quad [U_k = i] \in \mathcal{A} \quad \text{et que} \quad [V_k = i] \in \mathcal{A}.$$

Que signifient ces propriétés ?

**4.** Calculer la fonction génératrice de $X_1$.

**5.** Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de $N$.

**6.** On se propose dans cette question de simuler les variables aléatoires $V_k$ pour $N = 10$ et $1 \leqslant k \leqslant K_0 = 100$.

On rappelle que des appels répétés à l'instruction `random.randint(1,10)` simulent correctement le comportement de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $E = [\![1, 10]\!]$.

Ainsi, la fonction `simul_X`, dont le code figure ci-dessous, renvoie une liste de longueur $K_0 = 100$ de réalisations des variables $X_1, \dots, X_{100}$.

```python
def simul_X(N, K_0):
  L = []
  for i in range(K_0):
    L.append(random.randint(1,N))
  return L
```

Utiliser la fonction `simul_X` pour écrire une fonction `real_V(N, K_0)` qui retourne une liste de longueur $K_0$ de réalisations des variables $V_1, \ldots, V_{K_0}$.

**7.** Soit $k \geqslant 2$, un entier.

**7. a.** Démontrer que, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathbf{P}(U_k \geqslant i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

**7. b.** On exécute la fonction `real_V(10,100)` plusieurs fois. à chaque fois, on constate que la liste obtenue se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement cette observation.

**7. c.** Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N et de $S_k$. En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

**8.** Soient Z et T, deux variables aléatoires discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $V$. On sait que : quelle que soit l'application $\Phi : V \to W$ (où $W$ est aussi un ensemble fini ou dénombrable), les composées $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ sont des variables aléatoires discrètes.

On suppose que Z et T ont même loi. Démontrer que les variables $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ ont même loi.

**9.** Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$Y_i = N + 1 - X_i.$$

**9. a.** Démontrer que les $Y_i$ sont des variables aléatoires discrètes. Calculer leur espérance et leur variance.

**9. b.** Démontrer que le vecteur $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

**9. c.** En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

**10.** On considère ici le couple $(U_2, V_2)$.

**10. a.** Exprimer $U_2 + V_2$ et $U_2V_2$ en fonction de $X_1$ et $X_2$.

**10. b.** En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2V_2)$ en fonction de N. Expliquer brièvement comment on peut en déduire que :

$$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

(Le calcul détaillé n'est pas demandé.)

**10. c.** Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

**10. d.** Le **coefficient de corrélation** est défini par

$$\rho_2(N) = \frac{\mathbf{Cov}(U_2, V_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(U_2)\,\mathbf{V}(V_2)}}.$$

Que dire de $\rho_2(N)$ lorsque N tend vers $+\infty$ ?

**11. a.** On suppose que X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $E = [\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N} (2i-1)\,\mathbf{P}(X \geqslant i).$$

**11. b.** Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions $S_k$ et $S_{k+1}$.

**11. c.** En déduire l'expression de $\mathbf{V}(U_k)$.

**11. d.** Calculer un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

## Solution ❀ Probabilités

**1.** On fait une comparaison somme/intégrale avec la fonction continue et *croissante* $\left[t \mapsto t^k\right]$ : une figure soignée et correctement légendée convainc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_0^n t^k\,dt \leqslant S_k(n) \leqslant \int_0^n t^k\,dt + n^k$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \leqslant \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}.$$

Comme le majorant et le minorant tendent vers une même limite, on déduit du Théorème d'encadrement que

$$\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

**2.** Comme la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbf{P}(X = k).$$

Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = [\![1, N]\!]$,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad [X \geqslant i] = \bigsqcup_{k=i}^{N} [X = k].$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X \geqslant i) = \sum_{k=i}^{N} \mathbf{P}(X = k).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant i) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=i}^{N} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X = k)\mathbb{1}_{(1\leqslant i\leqslant k\leqslant N)} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X = k)\mathbb{1}_{(1\leqslant i\leqslant k\leqslant N)} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(X).\end{aligned}$$

**3. a.** Tous les $X_j$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, donc

$$[X_j \geqslant i] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [X_j \leqslant i] \in \mathcal{A}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$.

❧ En considérant $U_k$ comme une fonction de Ω dans E,

$$U_k(\omega) \geqslant i \iff \forall\, 1 \leqslant j \leqslant k, \quad X_j(\omega) \geqslant i$$

et donc, en traduisant cette équivalence en égalité des images réciproques :

$$[U_k \geqslant i] = \bigcap_{j=1}^{k} [X_j \geqslant i] \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection (finie ou dénombrable).

❧ De même,

$$V_k(\omega) \leqslant i \iff \forall\, 1 \leqslant j \leqslant k, \quad X_j(\omega) \leqslant i$$

et donc

$$[V_k \leqslant i] = \bigcap_{j=1}^{k} [X_j \leqslant i] \in \mathcal{A}.$$

**3. b.** Comme $U_k : \Omega \to [\![1, N]\!]$, on déduit déjà de la question précédente que

$$[U_k = N] = [U_k \geqslant N] \in \mathcal{A}.$$

Par ailleurs, pour tout $1 \leqslant i < N$,

$$[U_k = i] = [U_k \geqslant i] \cap [U_k \geqslant i+1]^c \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection et passage au complémentaire.
De même,

$$[V_k = 1] = [V_k \leqslant 1] \in \mathcal{A}$$

et, pour tout $1 < i \leqslant N$,

$$[V_k = i] = [V_k \leqslant i] \cap [V_k \leqslant i-1]^c \in \mathcal{A}.$$

❧ Ces propriétés démontrent que les applications $U_k$ et $V_k$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $E$.

**4.** Par définition de la fonction génératrice,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G_{X_1}(t) = \mathbf{E}(t^{X_1}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t^i.$$

**5.** Comme la variable aléatoire $X_1$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est d'espérance finie et admet un moment d'ordre deux. D'une part,

$$\mathbf{E}(X_1) = \sum_{i=1}^{N} i\,\mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}S_1(N) = \frac{N+1}{2}.$$

D'autre part, d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{N} i^2\,\mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}S_2(N) = \frac{(2N+1)(N+1)}{6}.$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \big[\mathbf{E}(X_1)\big]^2 = \frac{N^2-1}{12}.$$

**6.** On réalise une simulation, qu'on affecte à une liste `X`. Il reste ensuite à calculer le max de chaque début de liste : la tranche `X[:i+1]` contient les valeurs $X_1, \dots, X_i$.

```
def real_V(N, K_0):
  X = simul_X(N, K_0)
  V = [max(X[:i+1]) for i in range(K_0)]
  return V
```

Et une version moins pythonienne, qui reprend l'algorithme élémentaire de calcul du maximum.

```
def real_V(N, K_0):
  X = simul_X(N, K_0)
  M, V = X[0], [X[0]]
  for i in range(1, K_0):
    x = X[i]    # nouvelle valeur
    if (x>M):  # comparaison au maximum connu
      M = x     # nouveau maximum
      V.append(M)
  return V
```

**7. a.** D'après **[3.a.]**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U_k \geqslant i) = \mathbf{P}(X_1 \geqslant i, \dots, X_k \geqslant i) &= \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X_j \geqslant i) && \text{(par indépendance)}\\
&= \prod_{j=1}^{k}\Big((N-i+1)\cdot\frac{1}{N}\Big) && \text{(par [2.])}\\
&= \Big(\frac{N-i+1}{N}\Big)^k.
\end{aligned}$$

**7. b.** Ici, $N = 10$ et, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$V_{k+1}(\omega) = \max\{V_k(\omega), X_{k+1}(\omega)\}$$

donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad V_k(\omega) \leqslant V_{k+1}(\omega) \leqslant 10$$

et donc

$$\bigcap_{k=k_1}^{K_0} [V_k = 10] = [V_{k_1} = 10].$$

Un raisonnement analogue au **[7.a.]** montre que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(V_k \leqslant i) = \Big(\frac{i}{N}\Big)^k$$

et donc que

$$\mathbf{P}(V_k = 10) = 1 - \mathbf{P}(V_k \leqslant 9) = 1 - \Big(\frac{9}{10}\Big)^k.$$

En particulier, avec $k_1 = 25$,

$$\mathbf{P}(V_{25} = V_{26} = \cdots = V_{100} = 10) = 1 - \Big(\frac{9}{10}\Big)^{25} \approx 93\%.$$

*On peut vérifier expérimentalement ce calcul avec la fonction suivante, qui retourne une variable de Bernoulli égale à 1 si, et seulement si, l'une des 25 premières valeurs est égale à 10, c'est-à-dire* $\mathbb{1}_{(V_{25}=10)}$.

```
def succes():
  X = simul_X(10, 25)
  return (10 in X)
```

*On exécute un grand nombre de fois la fonction* `succes()` *pour constituer une réalisation d'un échantillon i.i.d. D'après la Loi des grands nombres, la proportion de 1 parmi les valeurs prises est une estimation assez fiable de la probabilité* $\mathbf{P}(V_{25} = 10)$.

```
Nb_iter, prop = 10000, 0
for i in range(Nb_iter):
  prop += succes()
prop /= Nb_iter
```

*L'exécution du code précédent donne bien une proportion proche de 93%.*

**7. c.** Par **[2.]** et **[7.a.]**,

$$\mathbf{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(U_k \geqslant i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-i+1)^k}{N^k} = \frac{1}{N^k} S_k(N).$$

Par **[1.]**,

$$\mathbf{E}(U_k) \sim \frac{N}{k+1}$$

lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

**8.** En tant que composées d'une variable aléatoire discrète par une fonction à valeurs dans $W$, $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $W$.

❧ Pour tout $w \in W$, on note $V_w$, l'image réciproque de $\{w\}$ par l'application $\Phi$ :

$$V_w = \Phi^*(\{w\}).$$

Alors

$$\big[\Phi(Z) = w\big] = [Z \in V_w] \quad \text{et} \quad \big[\Phi(T) = w\big] = [T \in V_w].$$

Comme $Z$ et $T$ sont des variables aléatoires discrètes *de même loi* à valeurs dans $V$ et que $V_w \in \mathfrak{P}(V)$, les événements $[Z \in V_w]$ et $[T \in V_w]$ sont équiprobables :

$$\mathbf{P}(Z \in V_w) = \mathbf{P}(T \in V_w)$$

et donc
$$\forall\, w \in W, \quad \mathbf{P}\big(\Phi(Z) = w\big) = \mathbf{P}\big(\Phi(T) = w\big),$$
ce qui prouve que les variables aléatoires discrètes $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ ont même loi.

❧ En particulier, ces variables ont même espérance (si elles sont d'espérance finie) et même variance (si elles admettent un moment d'ordre deux).

**9. a.** Il est clair que
$$f = [x \mapsto N + 1 - x]$$
est une application de $E$ dans $E$. Comme les $X_i$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E$, alors les $Y_i = f(X_i)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E$.

En tant que variables aléatoires aléatoires bornées, elles sont d'espérance finie et admettent un moment d'ordre deux.

❧ Par linéarité de l'espérance et **[5.]**,
$$\mathbf{E}(Y_i) = (N+1) - \mathbf{E}(X_i) = \frac{N+1}{2}.$$

❧ On sait que $\mathbf{V}(aX_i + b) = a^2\, \mathbf{V}(X_i)$, donc **[[5.]]**
$$\mathbf{V}(Y_i) = V(X_i) = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

**9. b.** Comme le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est, par hypothèse, une famille de variables aléatoires indépendantes, alors le vecteur
$$(Y_1, \dots, Y_n) = \big(f(X_1), \dots, f(X_n)\big)$$
est aussi une famille de variables aléatoires indépendantes (lemme des coalitions).

❧ Comme $Z = X_1$ et $T = X_i$ suivent la même loi, les variables $Y_1 = f(Z)$ et $Y_i = f(T)$ suivent aussi la même loi par **[8.]** Plus précisément,
$$Y_k(\omega) = i \iff X_k(\omega) = (N+1) - i$$
donc
$$\mathbf{P}(Y_k = i) = \mathbf{P}\big(X_k = (N+1) - i\big) = \frac{1}{N}$$
ce qui signifie que les variables aléatoires $Y_k$ suivent toutes la loi uniforme sur $E$.

**9. c.** On vient en fait de démontrer que les vecteurs aléatoires
$$Z = (X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \quad \text{et} \quad T = (Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$
ont même loi en tant que variables aléatoires à valeurs dans $E^n$. Considérons la fonction $\Phi : E^n \to E$ définie par
$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (N+1) - \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$
D'après **[8.]**, les variables aléatoires
$$\Phi(T) = (N+1) - \min\{Y_1, \dots, Y_n\} \quad \text{et} \quad \Phi(Z) = (N+1) - U_k$$
suivent la même loi. Or
$$V_k = \max\{X_1, \dots, X_n\} = \max\big\{(N+1) - Y_1, \dots, (N+1) - Y_n\big\} = (N+1) - \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$$
donc $V_k$ a même loi que $(N+1) - U_k$ et, comme au **[9.a.]**,
$$\mathbf{E}(V_k) = (N+1) - \mathbf{E}(U_k), \qquad \mathbf{V}(V_k) = \mathbf{V}(U_k).$$

> *D'après* **[7.c.]**,
> $$\mathbf{E}(V_k) \sim \frac{k}{k+1} \cdot N$$
> *lorsque* $N$ *tend vers* $+\infty$.

**10. a.** Étant donnés *deux* entiers $x_1$ et $x_2$, le maximum de ces nombres est l'un d'eux et le minimum est l'autre ! Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$,

— ou bien $U_2(\omega) = X_1(\omega)$ et $V_2(\omega) = X_2(\omega)$

— ou bien $U_2(\omega) = X_2(\omega)$ et $V_2(\omega) = X_1(\omega)$

Par conséquent,

$$U_2(\omega)+V_2(\omega)=X_1(\omega)+X_2(\omega) \quad \text{et} \quad U_2(\omega)V_2(\omega)=X_1(\omega)X_2(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

**10. b.** Comme les variables $X_1$ et $X_2$ sont (par hypothèse de départ) indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(U_2+V_2) &= \mathbf{V}(X_1+X_2)=\mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)=2\,\mathbf{V}(X_1) \qquad \text{(indépendance et même loi)}\\ &= \frac{N^2-1}{6}\end{aligned}$$

d'après **[5.]**. De manière analogue,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(U_2V_2) &= \mathbf{E}(X_1X_2)=\mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2)=[\mathbf{E}(X_1)]^2 \qquad \text{(indépendance et même loi)}\\ &= \Big(\frac{N+1}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$

❧ La covariance se déduit alors de la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbf{Cov}(U_2,V_2)=\mathbf{E}(U_2V_2)-\mathbf{E}(U_2)\,\mathbf{E}(V_2)$$

puisque les deux dernières espérances du second membre ont déjà été calculées (**[7.c.]**, **[9.c.]**) : le calcul ne présente pas de réelle difficulté.

**10. c.** Par **[9.c.]** et **[10.b.]**,

$$\mathbf{V}(U_2)=\mathbf{V}(V_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(U_2+V_2)=\frac{N^2-1}{6}.$$

Or

$$\mathbf{V}(U_2+V_2)=\mathbf{V}(U_2)+\mathbf{V}(V_2)+2\,\mathbf{Cov}(U_2,V_2)$$

donc

$$\mathbf{V}(U_2)=\frac{1}{2}\,\mathbf{V}(U_2+V_2)-\mathbf{Cov}(U_2,V_2)$$

et finalement

$$\mathbf{V}(U_2)=\mathbf{V}(V_2)=\frac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}.$$

**10. d.** Par **[9.c.]** et la question précédente,

$$\rho_2(N)=\frac{\mathbf{Cov}(U_2,V_2)}{\mathbf{V}(U_2)}=\frac{N^2-1}{2N^2+1}$$

donc $\rho_2(N)$ tend vers $1/2$ lorsque N tend vers $+\infty$.

**11. a.** Commençons par remarquer que

$$\sum_{i=1}^{j}(2i-1)=2S_1(j)-S_0(j)=j^2$$

pour tout $j\in\mathbb{N}^*$. On peut alors déduire de **[2.]** que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X\geqslant i) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X=j)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X=j)\mathbb{1}_{(1\leqslant i\leqslant j\leqslant N)}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j}(2i-1)\,\mathbf{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{N}j^2\,\mathbf{P}(X=j)\end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de transfert (cas d'une variable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs)

$$\mathbf{E}(X^2)=\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X\geqslant i).$$

**11. b.** On applique la relation précédente avec le **[7.a.]** :

$$\mathbf{E}(U_k^2)=\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\frac{(N-i+1)^k}{N^k}.$$

Avec le changement d'indice $i \leftarrow (N-i+1)$ :

$$\mathbf{E}(U_k^2) = \sum_{i=1}^{N} [2(N-i+1)-1]\frac{i^k}{N^k}$$

et finalement

$$\mathbf{E}(U_k^2) = \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k}.$$

**11. c.** Par Koenig-Huyghens, **[11.b.]** et **[7.c.]**,

$$\mathbf{V}(U_k) = \mathbf{E}(U_k^2) - [\mathbf{E}(U_k)]^2 = \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k} - \frac{[S_k(N)]^2}{N^{2k}}.$$

(J'imagine mal une simplification de cette expression !)

**11. d.** L'entier $k$ est fixé, on fait tendre $N$ vers $+\infty$ : on peut donc appliquer l'équivalent calculé au **[1.]**, sous la forme de développements asymptotiques afin de pouvoir les combiner linéairement (on n'ajoute pas des équivalents sans précaution).

$$\begin{aligned}
\frac{(2N+1)S_k(N)}{N^k} &= \frac{2N^2}{k+1} + o(N^2) \\
\frac{2S_{k+1}(N)}{N^k} &= \frac{2N^2}{k+2} + o(N^2) \\
\frac{[S_k(N)]^2}{N^{2k}} &= \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2)
\end{aligned}$$

On déduit de la formule établie à la question précédente que :

$$\mathbf{V}(U_k) = \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} \cdot N^2 + o(N^2) \sim \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} \cdot N^2$$

lorsque $N$ tend vers $+\infty$.