

Problème de Mathématiques

Référence pp2022 — Version du 31 décembre 2025

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction φ_x définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_x(t) = \max(x, t).$$

1. a. Tracer le graphe de φ_x .

1. b. Calculer

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) dt.$$

1. c. Tracer l'allure du graphe de Φ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et la variable aléatoire Y définie sur le même espace probabilisé par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt.$$

2. Dans cette question, X suit la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. Déterminer la loi de Y .

☞ On commencera bien entendu par étudier les valeurs prises par Y .

3. Dans cette question, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

3. a. Rappeler (sans démonstration) les valeurs prises par X , les valeurs de $\mathbf{P}(X = x)$ lorsque x parcourt l'ensemble $X(\Omega)$, l'espérance et la variance de X .

3. b. Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y , puis la loi de Y .

4. Dans cette question, on suppose que

$$X(\Omega) = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

et que

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

4. a. Déterminer la valeur de $\mathbf{P}(X = 1/2)$.

4. b. Déterminer la loi de Y , puis l'espérance de Y .

4. c. On définit une troisième variable aléatoire Z sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en posant

$$Z = XY.$$

Justifier que

$$Z(\Omega) = \left\{ \frac{-1}{2}, 0, \frac{5}{16}, 4 \right\}$$

et déterminer la loi de Z .

4. d. Les variables aléatoires X et Y sont-elles corrélées ?

Solution ✿ Probabilités

1. a. Pour $t \in]-\infty, x]$,

$$\varphi_x(t) = x$$

et pour $t \in [x, +\infty[$,

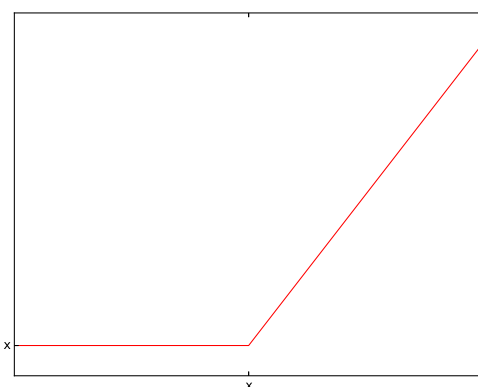
$$\varphi_x(t) = t.$$

La fonction φ_x est donc affine par morceaux (constante avant x , linéaire de pente 1 après x).

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} :

- elle est évidemment continue sur $]-\infty, x[$ (constante)
- et sur $]x, +\infty[$ (affine)
- et elle est aussi continue au point x car

$$\lim_{t \rightarrow x^-} \varphi_x(t) = \lim_{t \rightarrow x^-} x = x = \lim_{t \rightarrow x^+} \varphi_x(t) = \lim_{t \rightarrow x^+} t = x = \varphi_x(x).$$



1. b. Le réel x étant une valeur pivot pour φ_x , il faut discuter sur la position de x par rapport à l'intervalle d'intégration $[0, 1]$.

• Si $x < 0$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi_x(t) = t$$

et $\Phi(x) = 1/2$.

• Si $x > 1$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi_x(t) = x$$

et $\Phi(x) = x$.

• Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi_x(t) dt + \int_x^1 \varphi_x(t) dt = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x^2 + \frac{1^2 - x^2}{2} = \frac{1 + x^2}{2}.$$

1. c. La fonction Φ est définie en trois morceaux :

- un morceau constant sur $]-\infty, 0]$;
- un morceau polynomial de degré 2 sur $[0, 1]$;
- un morceau affine sur $[1, +\infty[$.

Il est donc clair que la fonction Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur les trois intervalles

$$]-\infty, 0[, \quad]0, 1[, \quad]1, +\infty[.$$

• **Étude du raccord en $x = 0$**

Il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2}{2}$$

donc la fonction Φ est continue au point $x = 0$.

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

donc la fonction Φ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, 1[$.

• **Étude du raccord en $x = 1$**

Il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x^2}{2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} x$$

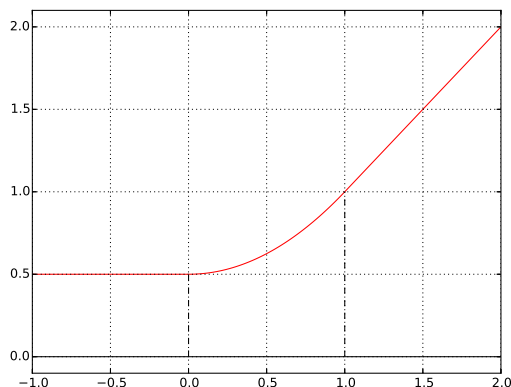
donc la fonction Φ est continue au point $x = 1$.

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 1} x = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

donc la fonction Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

• La fonction Φ est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .



2. Comme X suit une loi géométrique, on sait que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \geq 1$$

et par conséquent

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega).$$

Dans ce cas très particulier, les deux variables aléatoires X et Y sont égales (en tant que fonctions) et donc égales en loi : Y suit la loi géométrique de paramètre p , c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Y = k) = pq^{k-1}$$

où, bien entendu, $q = 1 - p$.

3. a. Les valeurs prises par une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$ sont les entiers $0, 1, \dots, n$. Pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

(où, comme d'habitude, $q = 1 - p$) et on sait bien que $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = npq$.

3. b. Comme on l'a déjà remarqué,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \Phi(X(\omega)).$$

On doit distinguer deux cas :

— si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$;

— sinon $X(\omega) \geq 1$ et donc $Y(\omega) = X(\omega)$.

L'ensemble des valeurs prises par Y est donc

$$\{1/2, 1, 2, \dots, n\}$$

et la loi de Y est donnée par

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = q^n$$

et par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

puisque

$$[Y = 1/2] \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad [Y = k] = [X = k].$$

4. a. Par hypothèse,

$$([X = -1], [X = 0], [X = 1/2], [X = 2])$$

est un système complet d'événements, donc

$$\mathbf{P}(X = 1/2) = 1 - [\mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2)]$$

c'est-à-dire $\mathbf{P}(X = 1/2) = 5/12$.

4. b. On rappelle que $Y = \Phi(X)$ et d'après l'expression de Φ ,

— si $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$;

— si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = \Phi(1/2) = 5/8$;

— si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = X(\omega) = 2$.

Les valeurs prises par Y sont donc $1/2, 5/8$ et 2 et, d'après la loi de X ,

$$\mathbf{P}(Y = 1/2) = \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 0) = 1/4,$$

$$\mathbf{P}(Y = 5/8) = \mathbf{P}(X = 1/2) = 5/12,$$

$$\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 2) = 1/3$$

puisque

$$[Y = 1/2] = [X = -1] \cup [X = 0], \quad [Y = 5/8] = [X = 1/2] \quad \text{et} \quad [Y = 2] = [X = 2].$$

• En tant que variable aléatoire bornée, Y est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(Y = 1/2) + \frac{5}{8} \mathbf{P}(Y = 5/8) + 2 \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{101}{96}.$$

4. c. Comme Y est une fonction de X , alors Z est aussi une fonction de X :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = X(\omega)\Phi(X(\omega)).$$

Pour déterminer la loi de Z , il suffit donc de discuter sur les valeurs prises par X .

— si $X(\omega) = -1$, alors $Y(\omega) = 1/2$ et $Z(\omega) = -1/2$;

— si $X(\omega) = 0$, alors $Z(\omega) = 0$;

— si $X(\omega) = 1/2$, alors $Y(\omega) = 5/8$ et $Z(\omega) = 5/16$;

— si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 2$ et $Z(\omega) = 4$.

On a bien démontré que

$$Z(\Omega) = \left\{ \frac{-1}{2}, 0, \frac{5}{16}, 4 \right\}.$$

On a aussi démontré par la même occasion que

$$[Z = -1/2] = [X = -1], \quad [Z = 0] = [X = 0], \quad [Z = 5/16] = [X = 1/2], \quad [Z = 4] = [X = 2]$$

et on peut en déduire la loi de Z :

$$\mathbf{P}(Z = -1/2) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/8, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = 1/8,$$

$$\mathbf{P}(Z = 5/16) = \mathbf{P}(X = 1/2) = 5/12, \quad \mathbf{P}(Z = 4) = \mathbf{P}(X = 2) = 1/3.$$

4. d. D'après Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Z) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y).$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{8} + 0 + \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{12} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{269}{192}$$

alors que $\mathbf{E}(Y) = \frac{101}{96}$ et que

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{3}{4}.$$

Il est donc clair que $\mathbf{Cov}(X, Y) \neq 0$: les variables aléatoires X et Y sont donc corrélées.

|| Même sans faire le calcul exact, on voit que $\mathbf{Cov}(X, Y) > 0$ et ce signe est facilement explicable : $Y = \Phi(X)$ où Φ est une fonction croissante.