Problème de Mathématiques

Référence pp1917 — Version du 31 décembre 2025

---

1. Soient $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n \geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ avec $p_n = \lambda/n$.

1. a. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 1$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1. b. En déduire la limite de $\mathbf{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (l'entier k restant fixé).

On **convient** alors d'approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda = np)$ lorsque $n \geqslant 50$, $p < 0,01$ et $np < 10$.

2. À l'oral d'un concours, on interroge n candidats nés en 1998. On suppose que les dates de naissance des candidats sont uniformément réparties sur l'année et on note X_n, le nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire.

Proposer un modèle probabiliste de X_n et préciser l'espérance de X_n déduite de ce modèle.

3. On interroge 219 candidats. Estimer la probabilité pour que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire.

Solution ❀ Probabilités

1. a. Il s'agit d'un produit de k facteurs, chaque facteur tendant vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme l'entier k est *fixé*, on en déduit que le produit tend vers 1.

1. b. Par définition de la loi binomiale,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}.$$

On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on suppose que $n \geqslant k$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on fait tendre n vers $+\infty$ en conservant k fixé). D'après la question précédente,

$$\binom{n}{k} p_n^k = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \times \frac{\lambda^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Le cofacteur est une forme indéterminée en 1^∞, qu'on résout avec la méthode habituelle :

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\big[(n-k)\,\ell n(1 - {}^{\lambda}\!/_{n})\big] = \exp\big[-\lambda + o(1)\big] = e^{-\lambda} \times e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

ce qui incite à approcher une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$ lorsque n est grand ($n \geqslant 50$), que p est petit ($p < 1\%$) et que np est moyen ($np < 10$).

2. Le nombre X_n compte le *nombre de succès* (succès = candidat interrogé le jour de son anniversaire) lors de la *répétition de n expériences* (expérience = le candidat est-il interrogé le jour de son anniversaire ?).

On ne dispose d'aucune information supplémentaire, donc il est légitime de supposer que les expériences sont indépendantes et que la probabilité de succès est la même pour chaque expérience.

Pour ces raisons, nous allons modéliser X_n par la loi binomiale

$$\mathscr{B}(n, \frac{1}{365})$$

(puisque 1998 n'est pas une année bissextile). Dans ces conditions,

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{n}{365}.$$

3. On a ici $n = 219 > 50$, $p = \frac{1}{365} < 1\%$ et

$$np = \frac{219}{365} = \frac{3 \times 73}{5 \times 73} = \frac{3}{5} < 10$$

ce qui rend légitime l'approximation

$$\mathscr{B}\Big(219, \frac{1}{365}\Big) \approx \mathscr{P}\Big(\frac{3}{5}\Big).$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(X_n = 2) \approx e^{-3/5}\,\frac{(3/5)^2}{2!} \approx 9,9\%.$$

> *Plus précisément, la probabilité $\mathbf{P}(X_n = 2)$ est égale*
> — *à $9,879\,468\%$ en suivant le modèle binomial ou*
> — *à $9,878\,609\%$ en suivant le modèle poissonnien.*
> *L'écart est évidemment négligeable !*