Problème de Mathématiques

Référence pp2122 — Version du 31 décembre 2025

Dans ce problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire discrète

$$X : \Omega \to E$$

définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans une partie dénombrable $E \subset \mathbb{R}$. On supposera connue une énumération de cette partie :

$$E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

et on notera

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \mathbf{P}(X = x_n).$$

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}).$$

Partie A. Premières propriétés

1. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme est égale à 1.

2. Démontrer que la série $\sum a_n e^{itx_n}$ est absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$$

et que φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Exprimer $\varphi_X(-t)$ en fonction de $\varphi_X(t)$. Que peut-on en déduire si la fonction φ_X est paire ?

Partie B. Image de φ_X

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$a + b\mathbb{Z} = \{a + bk,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\varphi_X(t)| \leqslant 1.$$

6. Dans cette question, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$E \subset a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}.$$

Démontrer que $|\varphi_X(t_0)| = 1$.

7. Réciproquement, nous supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$|\varphi_X(t_0)| = 1.$$

7. a. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\big[i(t_0 x_n - t_0 a)\big] = 1.$$

7. b. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big[1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)\big] = 0.$$

7. c. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'alternative suivante :

— ou bien $a_n = 0$,
— ou bien $x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

7. d. En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\Big) = 1.$$

Partie C. Fonction caractéristique et loi de X

L'objectif de cette partie est de montrer que, comme son nom l'indique, la fonction caractéristique de X *caractérise* la loi de X.

On note sinc, la fonction *sinus cardinal*, définie par

$$\operatorname{sinc} 0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

On **admet** que sinc est continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{sinc} x| \leqslant 1.$$

On fixe un réel m. Pour tout $T > 0$, on pose

$$V_m(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_X(t) e^{-imt}\, dt$$

ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(T) = \operatorname{sinc}\big((x_n - m)T\big) \cdot \mathbf{P}(X = x_n).$$

8. Démontrer que

$$\forall\, T > 0, \quad V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T).$$

9. Démontrer que la fonction V_m est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Démontrer que chaque fonction g_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

11. Démontrer que

$$\lim_{T \to +\infty} V_m(T) = \mathbf{P}(X = m).$$

12. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires discrètes telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \varphi_Y(t).$$

Démontrer que

$$\forall\, m \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = m) = \mathbf{P}(Y = m).$$

Comment interpréter ce résultat ?

Solution ❀ Fonction caractéristique

Partie A. Premières propriétés

1. Comme $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une énumération de E, la famille

$$\big([X = x_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

est un système complet d'événements. Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit d'une part que la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ est convergente et d'autre part que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|a_n e^{itx_n}\right| = a_n = \mathbf{P}(X = x_n),$$

et on déduit de la question précédente que la série $\sum a_n e^{itx_n}$ converge absolument.

3. Comme X est une variable aléatoire discrète, il en va de même pour e^{itX} (qui est une fonction de X).

D'après la Formule de transfert, la variable aléatoire e^{itX} est une variable d'espérance finie si, et seulement si, la famille

$$\big(e^{itx_n}\,\mathbf{P}(X = x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

est sommable, c'est-à-dire si la série $\sum a_n e^{itx_n}$ est absolument convergente : c'est bien le cas d'après **[2.]**

La fonction φ_X est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \sum_{x\in E} e^{itx}\,\mathbf{P}(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}.$$

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\big[t \mapsto a_n e^{itx_n}\big]$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}$.

On a vu à la question précédente que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |a_n e^{itx_n}| \leqslant a_n$$

où a_n est indépendant de t et $\sum a_n$ est une série convergente.

La série *de fonctions* continues $\sum a_n e^{itx_n}$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que sa somme φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a_n e^{i(-t)x_n} = \overline{a_n e^{itx_n}}$$

puisque les a_n et les x_n sont <u>réels</u>.

Comme la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n e^{i(-t)x_n} = \overline{\sum_{n=0}^{N} a_n e^{itx_n}}$$

et qu'elle est 1-lipschitzienne (c'est en fait une isométrie),

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}.$$

❧ Si la fonction φ_X est paire, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$$

et donc que φ_X est une fonction *à valeurs réelles*.

Partie B. Image de φ_X

5. Comme on l'a déjà remarqué au **[2.]** et au **[3.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|a_n e^{itx_n}\right| \leqslant a_n.$$

Par inégalité triangulaire et **[1.]**,

$$\left|\varphi_X(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n e^{itx_n}| = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) = 1$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_n = a + \frac{2k_n\pi}{t_0}.$$

Par conséquent,

$$e^{it_0x_n} = e^{it_0a} \cdot e^{i2k_n\pi} = e^{it_0a}$$

et donc (encore **[1.]**!)

$$\varphi_X(t_0) = e^{it_0a} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) = e^{it_0a},$$

ce qui prouve que $\left|\varphi_X(t_0)\right| = 1$.

7. a. Comme $\left|\varphi_X(t_0)\right| = 1$, alors il existe un réel θ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) \cdot e^{it_0x_n} = \varphi_X(t_0) = e^{i\theta}.$$

Or $t_0 \neq 0$, donc il existe $a = \theta/t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} = e^{it_0a}$ et donc tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) \cdot e^{it_0x_n} e^{-it_0a} = 1.$$

7. b. D'après **[1.]** et l'égalité précédente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\left[i(t_0x_n - t_0a)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc, par différence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1 - e^{it_0(x_n-a)}\right) = 0.$$

L'application $\mathfrak{Re}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et lipschitzienne et les a_n sont tous *réels*, donc

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{Re}(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathfrak{Re}\left(1 - e^{it_0(x_n-a)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(1 - \cos[t_0(x_n - a)]\right). \end{aligned}$$

> *Ici comme au **[5.]**, la linéarité seule ne permet pas de conclure : on ne peut invoquer la linéarité que sur une somme d'un nombre* FINI *de termes. Pour justifier*
>
> $$\varphi\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(u_n),$$
>
> *il faut s'assurer que l'application linéaire φ est continue (c'est-à-dire lipschitzienne).*

7. c. On reconnaît ici une somme de *réels positifs* et cette somme est nulle, donc tous les termes sont nuls.

Or un produit de réels est nul si, et seulement si, l'un des deux facteurs est nul. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

— ou bien $a_n = 0$,
— ou bien $\cos[t_0(x_n - a)] = 1$ et ce cas équivaut au fait que $t_0(x_n - a)$ soit un multiple entier de 2π, c'est-à-dire

$$\frac{t_0(x_n - a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

On conclut en rappelant que $t_0 \neq 0$ par hypothèse.

7. d. On utilise le système complet d'événements associé à X pour décomposer cet événement :

$$\Big[X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\Big] = \bigsqcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ tels que} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}} [X = x_n].$$

Par σ-additivité de **P** (on a une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints), on en déduit que

$$\mathbf{P}\Big(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\Big) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \text{ tels que} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}} a_n = 0$$

(puisque, d'après l'alternative précédente, tous les a_n qui figurent dans cette somme sont nuls).

Par passage au complémentaire, on en déduit que

$$\mathbf{P}\Big(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\Big) = 1.$$

Partie C. Fonction caractéristique et loi de X

8. On intègre sur le *segment* $[-T, T]$ l'expression

$$\varphi_X(t)e^{-imt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(x_n - m)t}.$$

Comme au **[3.]**, il s'agit de la somme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[-T, T]$.

Pour calculer chaque terme, il faut distinguer deux cas :
— ou bien $x_n = m$ et dans ce cas,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(x_n - m)t}\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1\,dt = 1$$

— ou bien $x_n \neq m$ et dans ce cas,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(x_n - m)t}\,dt = \frac{1}{2T}\cdot\Big[\frac{e^{i(x_n - m)t}}{i(x_n - m)}\Big]_{-T}^{T}.$$

Dans les deux cas,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(x_n - m)t}\,dt = \operatorname{sinc}\big[(x_n - m)T\big]$$

et par conséquent, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(x_n - m)t}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \operatorname{sinc}\big[(x_n - m)T\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T). \end{aligned}$$

9. Comme sinc est continue sur $\mathbb{R}$, chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ (par composition).

De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, T > 0, \quad \big|a_n \operatorname{sinc}\big[(x_n - m)T\big]\big| \leqslant a_n$$

et la série $\sum a_n$ converge (propriété déjà utilisée en **[2.]**, **[3.]** et **[5.]**...), donc la série de fonctions continues $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme V_m est par conséquent continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. On reprend la discussion menée au **[8.]**

— Si $m = x_n$, alors $g_n(T) = a_n$ pour tout $T > 0$, donc

$$\lim_{T\to+\infty} g_n(T) = a_n.$$

— Si $m \neq x_n$, alors

$$\lim_{T\to+\infty} g_n(T) = 0$$

par composition de limites (le produit $(x_n - m)T$ tend vers $\pm\infty$ et la fonction sinc tend vers 0 au voisinage de $\pm\infty$).

11. Chaque fonction g_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$; la série de fonctions g_n converge normalement (et donc uniformément) sur un voisinage de $+\infty$ (sur $\mathbb{R}_+^*$ en fait).

D'après le Théorème de la double limite, la somme V_m de cette série de fonctions tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{T\to+\infty} V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{T\to+\infty} g_n(T).$$

D'après la question précédente, la seule limite qui n'est pas nécessairement nulle au second membre est égale à $a_n = \mathbf{P}(X = x_n)$ et cela, seulement si $m = x_n$. Donc

$$\forall\, m \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{T\to+\infty} g_n(T) = \mathbf{P}(X = m).$$

12. Si les fonctions caractéristiques φ_X et φ_Y sont égales, alors pour tout $m \in \mathbb{R}$, les fonctions V_m calculées avec φ_X ou avec φ_Y sont les mêmes et en particulier, elles ont même limite au voisinage de $+\infty$.

On déduit de la question précédente que

$$\forall\, m \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = m) = \mathbf{P}(Y = m)$$

c'est-à-dire que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi.