# Problème de Mathématiques

Référence pp2120 — Version du 31 décembre 2025

---

## Partie A.

Soient X et Y, deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les fonctions génératrices de X et Y sont notées $G_X$ et $G_Y$ respectivement.

**1.** Démontrer que $[X \neq Y]$ est un événement.

**2.** Soient A et B, deux événements.
Démontrer que les probabilités $\mathbf{P}(A \cap B^c)$ et $\mathbf{P}(A^c \cap B)$ sont bien définies, puis que

$$\big|\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)\big| \leqslant \mathbf{P}(A \cap B^c) + \mathbf{P}(A^c \cap B).$$

**3.** En déduire que

$$\forall\, t \in [-1, 1], \quad \big|G_X(t) - G_Y(t)\big| \leqslant 2\,\mathbf{P}(X \neq Y).$$

## Partie B.

Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que la série $\sum \mathbf{P}(U_k \neq 0)$ soit convergente.

On note $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

**4.** Démontrer que l'ensemble $\mathbb{N}'$ est dénombrable. Est-il contenu dans $\mathbb{R}$ ?

**5.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_n = \big\{\omega \in \Omega \ :\ \exists\, k \geqslant n, \quad U_k(\omega) \neq 0\big\}.$$

Démontrer que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements et que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 0.$$

**6.** On considère l'application $W \,:\, \Omega \to \mathbb{N}'$ définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad W(\omega) = \#\big\{k \in \mathbb{N}^* \ :\ U_k(\omega) \neq 0\big\}.$$

Démontrer que $W$ est une variable aléatoire discrète et que

$$\mathbf{P}(W = +\infty) = 0.$$

**7.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = U_1 + \cdots + U_n$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(\omega)$$

si la série $\sum U_k(\omega)$ converge et $S(\omega) = +\infty$ dans le cas contraire.

On pose enfin

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad G(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = i)t^i.$$

**7. a.** Démontrer que $S_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**7. b.** Démontrer que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}'$ et que $[S \in \mathbb{N}]$ est un événement presque sûr.

**7. c.** Démontrer que G est continue sur le segment $[0, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, 1[$.

**7. d.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_n$, la fonction génératrice de $S_n$. Démontrer que la suite $(G_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers G.

## Solution ❀ Séries de variables aléatoires à valeurs entières

**Partie A.**

**1.** Comme X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille

$$\big([X=m, Y=n]\big)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$$

est un système complet d'événements et, quels que soient les entiers $m$ et $n$,

$$\begin{cases} X(\omega) \neq Y(\omega) \\ X(\omega) = m \\ Y(\omega) = n \end{cases} \iff \begin{cases} m \neq n \\ X(\omega) = m \\ Y(\omega) = n \end{cases}$$

donc

$$[X \neq Y] \cap [X=m, Y=n] = \left| \begin{array}{ll} \varnothing & \text{si } m=n, \\ [X=m, Y=n] & \text{sinon} \end{array} \right.$$

et par conséquent

$$[X \neq Y] = \bigsqcup_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \\ \text{tels que } m\neq n}} [X=m, Y=n].$$

Comme X et Y sont des variables aléatoires, alors

$$\forall\,(m,n)\in\mathbb{N}^2, \quad [X=m, Y=n]\in\mathcal{A}.$$

D'autre part, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable et toute partie d'un ensemble dénombrable est elle-même dénombrable. Donc $[X \neq Y]$ est une union dénombrable d'événements et par conséquent

$$[X\neq Y]\in\mathcal{A}.$$

> *On aurait aussi bien pu raisonner sur le complémentaire et justifier que*
>
> $$[X=Y] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [X=n, Y=n] \in \mathcal{A}.$$
>
> *La seule différence est une affaire de goût.*

**2.** Une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection (finie ou dénombrable). Par hypothèse, A et B appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$. Par conséquent,

$$A\cap B^c \in\mathcal{A} \quad \text{et} \quad A^c\cap B\in\mathcal{A}$$

et comme la mesure de probabilité **P** est définie sur $\mathcal{A}$, les deux probabilités $\mathbf{P}(A\cap B^c)$ et $\mathbf{P}(A^c\cap B)$ sont bien définies.

❧ En décomposant A sur le système complet d'événements $(B, B^c)$, on obtient

$$A = (A\cap B)\sqcup(A\cap B^c) \subset B\sqcup(A\cap B^c).$$

Par croissance et additivité de **P**,

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}\big(B\sqcup(A\cap B^c)\big) = \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap B^c)$$

et a fortiori

$$\mathbf{P}(A)\leqslant\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A\cap B^c)+\mathbf{P}(A^c\cap B)$$

puisque $\mathbf{P}(A^c\cap B)\geqslant 0$.

Symétriquement, en décomposant B sur $(A, A^c)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &\leqslant \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(A^c\cap B) \\ &\leqslant \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(A^c\cap B)+\mathbf{P}(A\cap B^c)\end{aligned}$$

et ces deux inégalités nous donnent bien

$$\big|\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B)\big| \leqslant \mathbf{P}(A\cap B^c)+\mathbf{P}(A^c\cap B).$$

> *On doit toujours se rappeler que la relation $|x| \leqslant y$ n'est pas une inégalité, mais un <u>encadrement</u> :*
> $$|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y.$$

**3.** On sait que les séries
$$\sum \mathbf{P}(X=n)t^n \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{P}(Y=n)t^n$$
convergent absolument pour tout $t \in [-1,1]$. Par inégalité triangulaire,
$$\begin{aligned}\big|G_X(t)-G_Y(t)\big| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \big|\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Y=n)\big|\,t^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \big|\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Y=n)\big|\end{aligned}$$
(puisque le terme général pour t quelconque est majoré par le terme pour $t=1$).

D'après **[2.]**,
$$\begin{aligned}&\big|\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Y=n)\big| \\ &\qquad \leqslant \mathbf{P}(X=n, Y\neq n)+\mathbf{P}(X\neq n, Y=n).\end{aligned}$$
Or (décomposition sur le système complet d'événements associé à X)
$$[X\neq Y] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [X=n]\cap[X\neq Y] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [X=n, Y\neq n]$$
et de même (par symétrie)
$$[X\neq Y] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [X\neq n, Y=n].$$
On a ici deux unions dénombrables d'événements deux à deux disjoints donc, par σ-additivité de $\mathbf{P}$, les deux séries
$$\sum \mathbf{P}(X=n, Y\neq n) \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{P}(X\neq n, Y=n)$$
sont convergentes et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n, Y\neq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X\neq n, Y=n) = \mathbf{P}(X\neq Y).$$
Par conséquent,
$$\forall\, t\in[-1,1], \quad \big|G_X(t)-G_Y(t)\big| \leqslant 2\,\mathbf{P}(X\neq Y).$$

> *On notera que le majorant trouvé est* indépendant *de* $t\in[-1,1]$.

**Partie B.**

**4.** Par définition, $\mathbb{N}'$ est l'union d'un ensemble dénombrable ($\mathbb{N}$) et d'un ensemble fini (le singleton $\{+\infty\}$), donc $\mathbb{N}'$ est dénombrable.

On ne sait pas trop ce que désigne $+\infty$ mais en tout cas, ce n'est pas un nombre réel. Donc $\mathbb{N}'$ n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

**5.** Par définition,
$$\forall\, n\geqslant 1, \quad Z_n = \bigcup_{k\geqslant n} [U_k\neq 0].$$
Comme les $U_k$ sont des variables aléatoires, alors
$$[U_k = 0]\in\mathcal{A},$$
donc
$$[U_k\neq 0] = [U_k=0]^c \in \mathcal{A}$$
et donc $Z_n\in\mathcal{A}$ en tant qu'union dénombrable d'événements. D'autre part,
$$Z_n = [U_n\neq 0]\cup \bigcup_{k\geqslant n+1} [U_k\neq 0] = [U_n\neq 0]\cup Z_{n+1}$$

et par conséquent, $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad Z_{n+1} \subset Z_n.$$

La suite de terme général $\mathbf{P}(Z_n)$ est donc convergente (décroissante et positive) Par sous-σ-additivité (puisque, pour une fois, les événements ne sont pas deux à deux disjoints),

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(Z_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(U_k \neq 0).$$

Le majorant est, par hypothèse, le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0 et par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 0.$$

**6.** La valeur de $W(\omega)$ est entière lorsque l'ensemble

$$\big\{k \in \mathbb{N}^* \;:\; U_k(\omega) \neq 0\big\} \subset \mathbb{N}$$

est fini et égale à $+\infty$ dans le cas contraire. Plus précisément, $W(\omega) = n$ si, et seulement si, il existe $n$ entiers

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

tels que

$$U_{k_1}(\omega) \neq 0, \ldots, U_{k_n}(\omega) \neq 0$$

et tels que

$$\forall\, k \notin \{k_1, \ldots, k_n\}, \quad U_k(\omega) = 0.$$

Par conséquent, $[W = n]$ est égal à

$$\bigsqcup_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n} \Bigg( \bigcap_{i=1}^{n} [U_{k_i} \neq 0] \cap \bigcap_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ k\notin\{k_1,\ldots,k_n\}}} [U_k = 0] \Bigg)$$

On a déjà justifié que $[U_k = 0] \in \mathcal{A}$ et $[U_k \neq 0] \in \mathcal{A}$ pour tout entier $k \geqslant 1$. La tribu $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable (comme toutes les tribus), donc l'ensemble entre parenthèses est bien un événement. Enfin, l'union disjointe est indexée par une partie de $\mathbb{N}^n$, qui est dénombrable en tant que produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [W = n] \in \mathcal{A}.$$

❧ Comme $W$ est à valeurs dans $\mathbb{N}'$, on en déduit que

$$[W = +\infty] = \Bigg( \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [W = n] \Bigg)^c \in \mathcal{A}$$

et on a maintenant démontré que

$$\forall\, x \in \mathbb{N}', \qquad [W = x] \in \mathcal{A},$$

c'est-à-dire que $W$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}'$.

Cependant, cette expression ne permet pas de calculer simplement $\mathbf{P}(W = +\infty)$...

❧ Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si, et seulement si, elle est majorée, donc

$$W(\omega) \neq +\infty \iff \exists\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant n, \quad U_k(\omega) = 0$$

c'est-à-dire (en écrivant la négation de ce qui précède)

$$W(\omega) = +\infty \iff \forall\, n \geqslant 1,\ \exists\, k \geqslant n, \quad U_k(\omega) \neq 0$$

et par conséquent

$$[W = +\infty] = \bigcap_{n\geqslant 1} Z_n \in \mathcal{A}.$$

D'après **[5.]** et la continuité décroissante de $\mathbf{P}$ (puisque la suite des événements $Z_n$ est décroissante pour l'inclusion),

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} Z_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n) = 0$$

donc l'événement $[W = +\infty]$ est bien négligeable.

**7. a.** En tant que somme d'un nombre fini de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction $S_n$ est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

**7. b.** Pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum U_k(\omega)$ est une série d'*entiers*.

Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0. Comme le terme général est un *entier*, il faut donc que le terme général soit nul à partir d'un certain rang.

Réciproquement, si le terme général est nul à partir d'un certain rang, alors la série $\sum U_k(\omega)$ est évidemment convergente.

❧ On a donc

$$[S \in \mathbb{N}] = [W \in \mathbb{N}] = \bigcup_{n\geqslant 1} Z_n^c$$

et, par passage au complémentaire,

$$[S = +\infty] = [W = +\infty] \in \mathcal{A}.$$

On déduit de **[6.]** que $\mathbf{P}(S = +\infty) = 0$ et donc que

$$\mathbf{P}(S \in \mathbb{N}) = 1.$$

❧ Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a donc

$$[S = s] = [S = s] \cap [S \in \mathbb{N}] = \bigcup_{n\geqslant 1} [S = s] \cap Z_n^c.$$

Or, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{cases} S(\omega) = s \\ \omega \notin Z_n \end{cases} \iff \begin{cases} S(\omega) = s \\ \forall\, k \geqslant n, \quad U_k(\omega) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S(\omega) = s \\ \forall\, k \geqslant n, \quad U_k(\omega) = 0 \\ S(\omega) = S_{n-1}(\omega) \end{cases}$$

(puisque le terme général de la série est positif ou nul). On en déduit que

$$[S = s] = \big([S = s] \cap Z_1^c\big) \cup \Big(\bigcup_{n\geqslant 2} [S_{n-1} = s] \cap Z_n^c\Big).$$

Si $\omega \notin Z_1$, alors $U_k(\omega) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ et par conséquent $S(\omega) = 0$.

On a ainsi démontré que

$$[S = 0] = Z_1^c \cup \Big(\bigcup_{n\geqslant 2} [S_{n-1} = 0] \cap Z_n^c\Big)$$

et que, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$[S = s] = \bigcup_{n\geqslant 2} [S_{n-1} = s] \cap Z_n^c.$$

❧ On sait par **[5.]** que les $Z_n$ sont des événements; on a justifié plus haut que $[S_m = s]$ est un événement pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in \mathbb{N}$; la tribu $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, par intersection et par union dénombrable (c'est son métier de tribu qui veut ça...), donc

$$\forall\, s \in \mathbb{N}, \quad [S = s] \in \mathcal{A}.$$

❧ Finalement,

$$\forall\, x \in \mathbb{N}', \qquad [S = x] \in \mathcal{A}$$

et S est bien une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}'$.

**7. c.** Bien que S ne soit pas une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a quand même

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = i) = \mathbf{P}(S \in \mathbb{N}) = 1$$

et on peut donc appliquer les résultats du cours sur les séries génératrices : la fonction G est continue sur le segment $[0, 1]$ (comme somme d'une série entière qui converge normalement sur cet intervalle) et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ (comme somme d'une série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à 1).

**7. d.** Nous allons bien sûr appliquer l'estimation établie en **[3.]** :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad |G(t) - G_n(t)| \leqslant 2\,\mathbf{P}(S \neq S_n).$$

Or

$$S(\omega) = S_n(\omega) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{U_k(\omega)}_{\geqslant 0}$$

donc

$$S(\omega) \neq S_n(\omega) \iff \exists\, k \geqslant n+1, \quad U_k(\omega) \neq 0$$

c'est-à-dire

$$[S \neq S_n] = \bigcup_{k \geqslant n+1} [U_k \neq 0] = Z_{n+1}.$$

Comme $\mathbf{P}(Z_{n+1})$ tend vers 0 d'après **[5.]**, on a bien trouvé un majorant de

$$\big|G(t) - G_n(t)\big|$$

qui est indépendant de $t \in [0, 1]$ et qui tend vers 0 : la suite $(G_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$ vers G.