Problème de Mathématiques

Référence pp2123 — Version du 31 décembre 2025

On considère ici une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que

$$\mathbf{P}(X = 0) > 0.$$

Sa fonction génératrice est notée G_X.

1. Démontrer qu'il existe une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i\geqslant 1}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j).$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que

$$\left|\lambda_k\right|\,\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \mathbf{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbf{P}(X = k - j)$$

puis que

$$\left|\lambda_k\right|\,\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \big[1 - \mathbf{P}(X = 0)\big] \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right).$$

3. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(X = 0)^k}.$$

4. On note $\rho(X)$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda_k t^k$. Démontrer que

$$\rho(X) \geqslant \mathbf{P}(X = 0).$$

5. Pour tout réel $t \in \left]-\rho(X), \rho(X)\right[$, on pose

$$H_X(t) = \ell n\,\mathbf{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k t^k.$$

5. a. Démontrer que

$$\forall\, t \in \left]-\rho(X), \rho(X)\right[, \quad G_X'(t) = H_X'(t) G_X(t).$$

5. b. En déduire l'expression de $H_X(t)$ en fonction de la fonction génératrice $G_X(t)$.

Solution ❀ Série génératrice

1. On procède par récurrence.

❧ Pour $k = 1$, l'équation devient

$$\mathbf{P}(X = 1) = \lambda_1\,\mathbf{P}(X = 0)$$

et comme $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ par hypothèse, on en déduit que la seule solution est

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{P}(X = 1)}{\mathbf{P}(X = 0)}.$$

❧ HR : Supposons que, pour un rang $n \geqslant 1$, on ait démontré qu'il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j).$$

Alors au rang $(n + 1)$, l'équation est

$$(n + 1)\,\mathbf{P}(X = n + 1) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j)}_{\text{connu}} + (n + 1)\lambda_{n+1}\,\mathbf{P}(X = 0).$$

Comme $\mathbf{P}(X = 0) > 0$, il s'agit d'une équation du premier degré en λ_{n+1} (seule inconnue de cette équation !) et elle admet par conséquent une unique solution.

❧ L'hypothèse de récurrence est donc établie pour tout $n \geqslant 1$ et par conséquent il existe une, et une seule, famille réelle $(\lambda_i)_{i\geqslant 1}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j).$$

2. Isolons le terme en $j = k$:

$$k\,\mathbf{P}(X = k) = k\lambda_k\,\mathbf{P}(X = 0) + \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j)$$

puis divisons par $k \geqslant 1$:

$$\lambda_k\,\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = k) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\lambda_j\,\mathbf{P}(X = k - j)$$

et prenons la valeur absolue avant d'appliquer l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda_k|\,\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \underbrace{\mathbf{P}(X = k)}_{\geqslant 0} + \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{\frac{j}{k}}_{\in[0,1]} \underbrace{|\lambda_j|\,\mathbf{P}(X = k - j)}_{\geqslant 0} \leqslant \mathbf{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbf{P}(X = k - j)$$

❧ Pour $0 \leqslant j < k$, on a $k - j \geqslant 1$ et par conséquent

$$[X = k - j] \subset [X = 0]^c.$$

Par croissance de la mesure $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X = k - j) \leqslant \mathbf{P}([X = 0]^c) = 1 - \mathbf{P}(X = 0).$$

Comme les $|\lambda_j|$ sont positifs, on en déduit que

$$|\lambda_k|\,\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \mathbf{P}(X = k) + \big[1 - \mathbf{P}(X = 0)\big]\left(\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right) \leqslant \big[1 - \mathbf{P}(X = 0)\big]\left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right)$$

pour tout $k \geqslant 1$.

3. On procède encore par récurrence.

❧ Pour $k = 1$, la relation précédente se réduit à

$$|\lambda_1| \ \mathbf{P}(X=0) \leqslant 1 - \mathbf{P}(X=0)$$

donc

$$1 + |\lambda_1| \leqslant 1 + \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)} - 1 = \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)}.$$

❧ HR : on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^k}.$$

D'après **[2.]** et HR,

$$|\lambda_{k+1}| \leqslant \frac{1-\mathbf{P}(X=0)}{\mathbf{P}(X=0)} \cdot \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^k} \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^{k+1}} - \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^k}$$

et on déduit alors de HR que

$$1 + \sum_{j=1}^{k+1} |\lambda_j| = \left(1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|\right) + |\lambda_{k+1}| \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^k} + \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^{k+1}} - \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^k} \leqslant \frac{1}{\mathbf{P}(X=0)^{k+1}}$$

et le résultat est démontré par récurrence.

4. Par **[2.]** et **[3.]**,

$$|\lambda_k t^k| \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{t^k}{\mathbf{P}(X=0)^k}\right)$$

et pour $|t| < \mathbf{P}(X=0)$, la série géométrique de raison $\frac{t}{\mathbf{P}(X=0)}$ est absolument convergente.

Par comparaison, la série $\sum \lambda_k t^k$ est absolument convergente au moins pour

$$|t| < \mathbf{P}(X=0),$$

ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda_k t^k$ est au moins égal à $\mathbf{P}(X=0)$ et en particulier qu'il est strictement positif.

5. a. Le rayon de convergence de la série génératrice de X est au moins égal à 1 ; le rayon de convergence de la série $\sum \lambda^k t^k$ est au moins égal à $\mathbf{P}(X=0) \leqslant 1$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'intervalle

$$I_0 = \left]-\rho(X), \rho(X)\right[$$

est contenu dans l'intervalle ouvert de convergence de ces deux séries entières.

❧ Comme les deux rayons de convergence sont *strictement* positifs, les sommes G_X et H_X sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I_0 et on peut dériver terme à terme pour exprimer les dérivées.

D'une part,

$$\forall\, t \in I_0, \quad G'_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\,\mathbf{P}(X=k+1)t^k$$

et d'autre part,

$$\forall\, t \in I_0, \quad H'_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\lambda_{j+1} t^j.$$

❧ Le rayon de convergence de la série dérivée est le même que celui de la série entière initiale. Par conséquent, les séries $\sum j\lambda_j t^{j-1}$ et $\sum \mathbf{P}(X=k)t^k$ sont *absolument* convergentes sur l'intervalle ouvert I_0 et on peut appliquer le théorème sur le produit de Cauchy.

Ainsi, pour tout $t \in I_0$ (au moins),

$$H'_X(t)G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k(t)$$

où on a posé, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$w_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \big[(j+1)\lambda_{j+1} t^j\big] \cdot \big[\mathbf{P}(X = k-j)t^{k-j}\big] = \left[\sum_{j=0}^{k} (j+1)\lambda_{j+1}\,\mathbf{P}(X = k-j)\right] t^k$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j\,\mathbf{P}(X = [k+1]-j)\right] t^k$$

$$= (k+1)\,\mathbf{P}(X = k+1)\,t^k$$

par définition des λ_i. On a bien démontré que

$$\forall\, t \in I_0, \quad G_X'(t) = H_X'(t)G_X(t).$$

5. b. On déduit de la question précédente que H_X' est la dérivée logarithmique de G_X et donc que $H_X - \ell n\, G_X$ est constante sur l'intervalle I_0. Or, par définition,

$$H_X(0) = \ell n\,\mathbf{P}(X = 0) = \ell n\, G_X(0)$$

donc

$$\forall\, t \in I_0, \quad H_X(t) = \ell n\, G_X(t).$$

‖ *Ceux qui n'aiment pas la dérivée logarithmique ont bien tort !*