Problème de Mathématiques

Référence pp1919 — Version du 31 décembre 2025

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $[-1, 1]$ et une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi que X.

On note :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Démontrer que X est une variable aléatoire d'espérance finie.

On suppose désormais que X est une variable aléatoire *centrée* (quitte à remplacer X par $X - \mathbf{E}(X)$).

2. Énoncer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Démontrer cette inégalité dans le cas où Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

3. Démontrer que

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

4. Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{[\mathbf{E}(e^{tX})]^n}{e^{nt\varepsilon}}.$$

5. Soit $a > 1$. Démontrer que la fonction

$$g_a = \left[x \mapsto \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x\right]$$

est positive sur $[-1, 1]$.

☞ *On pourra invoquer un argument de convexité.*

6. En déduire que

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

7. En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t$ pour tout $t > 0$.

8. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^k.$$

En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp({}^{t^2}\!/_2)$ pour tout $t > 0$.

9. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que la fonction

$$\big[t \mapsto \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2)\big]$$

atteint un minimum (en un point qu'on précisera).

10. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.

12. Soient $\varepsilon > 0$ fixé et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B_n = \bigcup_{m\geqslant n} [|S_m| > \varepsilon].$$

Démontrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est un événement négligeable.

13. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit $\Omega_k \subset \Omega$ par

$$\omega \in \Omega_k \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Démontrer que chaque Ω_k est un événement. Exprimer l'ensemble A défini par

$$\omega \in A \iff \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$$

au moyen des événements Ω_k. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.

Solution ❀ Loi des grands nombres

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$, la famille, finie ou dénombrable, des valeurs prises par la variable aléatoire discrète X.
Par *définition*, X est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la famille

$$\big(x_i\,\mathbf{P}(X=x_i)\big)_{i\in I}$$

est sommable. Or $x_i\in[-1,1]$ pour tout $i\in I$ par hypothèse, donc

$$\forall\, i\in I,\quad |x_i|\,\mathbf{P}(X=x_i)\leqslant \mathbf{P}(X=x_i).$$

Mais X est une variable aléatoire discrète, donc la famille $([X=x_i])_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints. Comme $\mathbf{P}$ est σ-additive, on en déduit que la famille $(\mathbf{P}(X=x_i))_{i\in I}$ est sommable et, d'après le Théorème de comparaison, la famille $(x_i\,\mathbf{P}(X=x_i))_{i\in I}$ est sommable elle aussi.

Donc X est bien une variable aléatoire d'espérance finie.

La même démonstration établit que toute variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.

2. Inégalité de Markov :

Soit Y, *une variable aléatoire positive d'espérance finie. Pour tout* $\alpha>0$,

$$\mathbf{P}(Y\geqslant\alpha)\leqslant\frac{\mathbf{E}(Y)}{\alpha}.$$

❧ Démonstration dans le cas où Y prend un nombre fini de valeurs : on note $(y_i)_{0\leqslant i<n}$, la famille des valeurs (positives) prises par Y et on fixe $\alpha>0$.

Par définition,

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{0\leqslant i<n} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)=\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i<\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)+\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i).$$

Si $y_i<\alpha$, alors $y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)\geqslant 0$ car Y est à valeurs positives ; si, au contraire, $y_i\geqslant\alpha$, alors

$$y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)\geqslant\alpha\,\mathbf{P}(Y=y_i)$$

car $\mathbf{P}$ est à valeurs positives. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Y)\geqslant\alpha\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}}\mathbf{P}(Y=y_i)=\alpha\,\mathbf{P}(Y\geqslant\alpha)$$

et l'inégalité de Markov en découle (puisque $\alpha>0$).

3. Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors $|X|$ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et comme $|X|$ est à valeurs positives, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov.

4. Comme $nt>0$ et que la fonction exp est strictement croissante, alors

$$\begin{aligned}\forall\,\omega\in\Omega,\quad S_n(\omega)\geqslant\varepsilon &\iff ntS_n(\omega)\geqslant nt\varepsilon\\ &\iff \exp[ntS_n(\omega)]\leqslant\exp(nt\varepsilon).\end{aligned}$$

(NB : il faut insister sur le *strictement* pour justifier les équivalences !)

On en déduit que

$$[S_n\geqslant\varepsilon]=\big[e^{ntS_n}\geqslant e^{nt\varepsilon}\big]$$

et donc que (par croissance de $\mathbf{P}$)

$$\mathbf{P}(S_n\geqslant\varepsilon)=\mathbf{P}(e^{ntS_n}\geqslant e^{nt\varepsilon}).$$

Par hypothèse, les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et bornées. D'après le Théorème des coalitions, les variables aléatoires e^{tX_1}, e^{tX_2}, ..., e^{tX_n} sont elles aussi indépendantes et bornées. Or

$$e^{ntS_n}=e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n},$$

donc e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie et, par indépendance des facteurs,

$$\mathbf{E}(e^{ntS_n})=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(e^{tX_i})=\big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n$$

puisque les variables X_i ont toutes même loi que X.

Comme e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov et en déduire que

$$\mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{\left[\mathbf{E}(e^{tX})\right]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

et donc enfin que

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\left[\mathbf{E}(e^{tX})\right]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

5. Pour $a > 0$, on sait que $a^x = e^{x \ln a}$. Donc g_a est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$g_a''(x) = -a^x(\ln a)^2 < 0$$

donc la fonction g_a est concave sur $[-1, 1]$.

Or $g_a(1) = a - a = 0$ et $g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0$, donc la corde qui joint les points d'abscisses ± 1 sur le graphe de g_a est un segment de l'axe des abscisses. Comme g_a est concave, son graphe est au-dessus de ses cordes, donc

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad g_a(x) \geqslant 0.$$

6. Pour $t > 0$, on pose $a = e^t > 1$ et

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t - e^{tx} \geqslant 0$$

d'après la question précédente.

7. Par hypothèse, $x = X(\omega) \in [-1, 1]$ pour tout $\omega \in \Omega$ et d'après la question précédente,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad e^{tX(\omega)} \leqslant \operatorname{ch} t + X(\omega) \operatorname{sh} t.$$

Les variables X et e^{tX} sont d'espérance finie (elles sont bornées toutes les deux par hypothèse) et l'espérance conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t + \mathbf{E}(X) \operatorname{sh} t = \operatorname{ch} t$$

puisque X est centrée par hypothèse.

8. Il s'agit en fait de vérifier que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 2^k k! \leqslant (2k)!$$

c'est-à-dire

$$2^k \leqslant \prod_{i=k+1}^{2k} i = \prod_{i=1}^{k} (k+i).$$

Pour $k \geqslant 1$, on a de chaque côté un produit de k facteurs ; à gauche, tous les facteurs sont égaux à 2 ; à droite, les facteurs sont tous supérieurs à $(k+i) \geqslant (k+1) \geqslant 2$. Par conséquent, l'inégalité est démontrée pour $k \geqslant 1$.

Enfin, pour $k = 0$, l'inégalité est évidente : elle se réduit à $1 \leqslant 1$...

Donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc, d'après la question précédente, que

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp(t^2/2).$$

9. Posons

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2).$$

Il est clair que f_n est strictement positive et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f_n'(t) = n(t - \varepsilon) f_n(t)$$

donc $f_n'(t)$ est du signe de $(t-\varepsilon)$.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0,\varepsilon]$ et strictement croissante sur $[\varepsilon,+\infty[$. Cette fonction atteint donc un minimum en $t=\varepsilon$ et ce minimum est égal à

$$f_n(\varepsilon)=\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

10. D'après **[4.]** et **[7.]**,

$$\forall\, t>0,\quad \mathbf{P}(S_n\geqslant\varepsilon)\leqslant f_n(t).$$

Le minorant (à gauche) étant indépendant de t, on peut passer à la borne inférieure par rapport à $t>0$ et obtenir :

$$\mathbf{P}(S_n\geqslant\varepsilon)\leqslant f_n(\varepsilon)=\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

❧ La propriété $|S_n(\omega)|\geqslant\varepsilon$ est vraie si $S_n(\omega)\geqslant\varepsilon$ ou si $S_n(\omega)\leqslant-\varepsilon$. Par conséquent,

$$[|S_n|\geqslant\varepsilon]=[S_n\geqslant\varepsilon]\sqcup[S_n\leqslant-\varepsilon]=[S_n\geqslant\varepsilon]\sqcup[-S_n\geqslant\varepsilon]$$

et donc, par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon)=\mathbf{P}(S_n\geqslant\varepsilon)+\mathbf{P}(-S_n\geqslant\varepsilon).$$

Les variables aléatoires $-X_1$, ..., $-X_n$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables aléatoires X_1, ..., X_n : elles sont discrètes, à valeurs dans $[-1,1]$, indépendantes (Théorème des coalitions) et toutes de même loi (celle de $-X$, qui est *a priori* différente de celle de X).

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(-S_n\geqslant\varepsilon)=\mathbf{P}\big((-X_1)+\cdots+(-X_n)\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\exp(-n\varepsilon^2/2)$$

et finalement

$$\mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. La majoration précédente peut aussi s'écrire

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2q^n$$

avec $0<q=\exp(-\varepsilon^2/2)<1$. Par comparaison avec une série géométrique, la série $\sum\mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon)$ est donc (absolument) convergente.

❧ Il est par ailleurs clair que : si $|S_n(\omega)|>\varepsilon$, alors $|S_n(\omega)|\geqslant\varepsilon$. Cela se traduit par

$$\big[|S_n|>\varepsilon\big]\subset\big[|S_n|\geqslant\varepsilon\big]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, n\geqslant 1,\quad 0\leqslant\mathbf{P}(|S_n|>\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon).$$

à nouveau par comparaison, on en déduit que la série $\sum\mathbf{P}(|S_n|>\varepsilon)$ est (absolument) convergente.

12. Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on sait que S_m est une variable aléatoire discrète. Notons $(s_{m,i})_{i\in I_m}$, l'ensemble (fini ou dénombrable) des valeurs prises par S_m. Il est alors clair que

$$[|S_m|>\varepsilon]=\bigsqcup_{\substack{i\in I_m\\ |s_{m,i}|>\varepsilon}}\underbrace{[S_m=s_{m,i}]}_{\in\mathcal{A}}\in\mathcal{A}$$

en tant qu'union finie ou dénombrable d'événements.

En tant qu'union dénombrable d'événements, l'ensemble

$$B_n=\bigcup_{m\geqslant n}[|S_m|>\varepsilon]$$

est donc un événement et, en tant qu'intersection dénombrable d'événements, l'ensemble

$$\bigcap_{n\geqslant 1}B_n$$

appartient lui aussi à la tribu $\mathcal{A}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$B_n = [|S_n| > \varepsilon] \cup \bigcup_{m \geqslant n+1} [|S_m| > \varepsilon] \supset B_{n+1}.$$

La famille $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite décroissante d'événements. Par continuité monotone de $\mathbf{P}$, on sait alors que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} B_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Et comme B_n est, par définition, une union dénombrable d'événements,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon).$$

Le majorant est le reste d'une série convergente (d'après la question précédente), donc il tend vers 0. Par encadrement, $\mathbf{P}(B_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et finalement l'événement $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est négligeable.

13. Par définition,

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant 1/k].$$

Comme S_m est une variable aléatoire, alors $[|S_m| \leqslant 1/k] \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable, donc $\Omega_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

❧ Par définition, la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant \varepsilon]$$

mais cette expression est inutile : l'intersection qui porte sur $\varepsilon > 0$ n'est pas une intersection dénombrable !

Il reste alors à remarquer que la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant 1/k$$

(puisque la suite de terme général $1/k$ tend vers 0) et donc

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection *dénombrable*.

14. D'après la question précédente,

$$A^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k^c \quad \text{où} \quad \Omega_k^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geqslant n} [|S_m| > 1/k].$$

D'après **[12.]** (avec $\varepsilon = 1/k$), chaque événement Ω_k^c est négligeable. On sait qu'une union dénombrable d'événements négligeables est elle-même un événement négligeable, donc A^c est négligeable et par conséquent

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

❧ On vient ainsi démontrer un cas particulier de la **Loi forte des grands nombres** : presque sûrement, la suite de terme général $S_n(\omega)$ converge vers $0 = \mathbf{E}(X)$.