Problème de Mathématiques

Référence CS23MP2-IC — Version du 31 décembre 2025

❖ Exercice ❖

On considère un entier $n \geqslant 2$ et des variables aléatoires indépendantes $Z_1, \ldots, Z_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on définit deux nouvelles variables aléatoires

$$R_p = Z_1 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad M_p = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |Z_k|.$$

On admet que ce sont bien des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On souhaite démontrer la propriété suivante.

$$\forall\, x > 0, \quad \mathbf{P}(M_n \geqslant 3x) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbf{P}(|R_p| \geqslant x)$$

Pour cela, on fixe (une fois pour toutes) un réel $x > 0$ et on pose

$$A = [M_n \geqslant 3x], \quad A_1 = \big[|R_1| \geqslant 3x\big] \quad \text{et} \quad \forall\, 2 \leqslant p \leqslant n, \quad A_p = [M_{p-1} < 3x] \cap \big[|R_p| \geqslant 3x\big].$$

On *admet* que A et les A_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, sont bien des évènements : $A \in \mathcal{A}$ et $A_p \in \mathcal{A}$ pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$.

1. Exprimer l'évènement A au moyen des évènements $A_1, \ldots, A_n$.

2. Démontrer que

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}\big(A_p \cap \big[|R_n| < x\big]\big).$$

3. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant p \leqslant n, \quad A_p \cap \big[|R_n| < x\big] \subset A_p \cap [|R_n - R_p| > 2x].$$

4. En déduire que

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x).$$

5. Conclure.

Solution ❀ Une inégalité maximale

> *Rappelons que le **maximum** M_n d'un ensemble fini de réels $|R_1|, \dots, |R_n|$ est inférieur à un seuil α si, et seulement si, tous ces réels sont inférieurs à α :*
>
> $$\omega \in [M_n \leqslant \alpha] \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |R_k(\omega)| \leqslant \alpha$$
>
> *et que ce maximum est supérieur à un seuil β si, et seulement si, l'un de ces réels au moins est supérieur à β :*
>
> $$\omega \in [M_n \geqslant \beta] \iff \exists\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |R_k(\omega)| \geqslant \beta.$$
>
> *En termes probabilistes,*
>
> $$[M_n \leqslant \alpha] = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} \big[|R_k| \leqslant \alpha\big] \quad \textit{et} \quad [M_n \geqslant \beta] = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} \big[|R_k| \geqslant \beta\big].$$
>
> *Bien entendu, des propriétés analogues sont vraies pour le minimum.*

1. Par définition,

$$A = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} \big[|R_k| \geqslant 3x\big]$$

et

$$\forall\, 2 \leqslant p \leqslant n, \quad A_p = \big[|R_1| < 3x\big] \cap \dots \cap \big[|R_{p-1}| < 3x\big] \cap \big[|R_p| \geqslant 3x\big] \subset \big[|R_p| \geqslant 3x\big].$$

❧ Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on sait que $A_k \subset \big[|R_k| \geqslant 3x\big]$. Par conséquent,

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k \subset \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} \big[|R_k| \geqslant 3x\big] = A.$$

❧ Soient $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On vient de voir que $A_i \subset \big[|R_i| \geqslant 3x\big]$ et que $A_j \subset \big[|R_i| < 3x\big]$ (puisque $i < j$). Par conséquent, $A_i \cap A_j = \varnothing$ et les A_i sont deux à deux disjoints.

Nous avons ainsi démontré que

$$\bigsqcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k \subset A.$$

❧ Réciproquement, pour tout $\omega \in A$, on sait qu'il existe au moins un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $|R_k(\omega)| \geqslant 3x$. Par conséquent, l'ensemble

$$N_\omega = \big\{k \in [\![1, n]\!] \; : \; |R_k(\omega)| \geqslant 3x\big\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$. En posant $p = \min N_\omega$, on a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k < p, \quad |R_k(\omega)| < 3x \quad \text{et} \quad |R_p(\omega)| \geqslant 3x,$$

c'est-à-dire $\omega \in A_p$. Autrement dit,

$$\forall\, \omega \in A, \; \exists\, 1 \leqslant p \leqslant n, \quad \omega \in A_p$$

c'est-à-dire

$$A \subset \bigcup_{1\leqslant p\leqslant n} A_p.$$

On a donc démontré que

$$A = \bigsqcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k$$

et en particulier que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n)$.

2. Considérons l'évènement $B_n = \big[|R_n| < x\big]$.

> *L'énoncé ayant admis que R_n était une variable aléatoire, on en déduit que $|R_n|$ est aussi une variable aléatoire et l'image réciproque de l'intervalle $]-\infty, x[$ par une variable aléatoire est un évènement.*
> *Cela dit par parenthèses, l'énoncé jugeant prudent de ne pas poser cette question.*

Le couple (B_n^c, B_n) est un système complet d'évènements, donc

$$A = A \cap (B_n^c \sqcup B_n) = (A \cap B_n^c) \sqcup (A \cap B_n).$$

Il est clair que $A \cap B_n^c \subset B_n^c$ et, par distributivité,

$$A \cap B_n = \left(\bigsqcup_{p=1}^{n} A_p\right) \cap B_n = \bigsqcup_{p=1}^{n} (A_p \cap B_n) \subset B_n.$$

Ainsi,

$$A \subset B_n^c \sqcup \left(\bigsqcup_{p=1}^{n} (A_p \cap B_n)\right)$$

et, par croissance et additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B_n^c) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(A_p \cap B_n).$$

En revenant à la définition de B_n, on obtient :

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}\big(A_p \cap \big[|R_n| < x\big]\big).$$

> *C'est incontestable : on y voit plus clair et on gagne beaucoup de temps en donnant un nom simple aux évènements compliqués !*

3. D'une part, il est évident que

$$A_p \cap \big[|R_n| < x\big] \subset A_p.$$

D'autre part, si $\omega \in A_p \cap \big[|R_n| < x\big]$, alors en particulier

$$|R_p(\omega)| \geqslant 3x \quad \text{et} \quad |R_n(\omega)| < x.$$

On peut donc déduire de l'inégalité triangulaire que

$$\big|R_n(\omega) - R_p(\omega)\big| \geqslant \big||R_p(\omega)| - |R_n(\omega)|\big| = |R_p(\omega)| - |R_n(\omega)| > 3x - x = 2x.$$

On a donc également l'inclusion

$$A_p \cap \big[|R_n| < x\big] \subset \big[|R_n - R_p| > 2x\big]$$

et donc

$$A_p \cap \big[|R_n| < x\big] \subset A_p \cap \big[|R_n - R_p| > 2x\big].$$

4. On déduit des deux questions précédentes et de la croissance de $\mathbf{P}$ que

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}\big(A_p \cap \big[|R_n - R_p| > 2x\big]\big).$$

Il faut alors se rendre compte que

- l'évènement A_p est défini à l'aide des variables aléatoires R_1, ..., R_p et donc des variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_p$;
- alors que $R_n - R_p = Z_{p+1} + \cdots + Z_n$.

Par hypothèse, les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes, donc les deux variables aléatoires $f(Z_1, \dots, Z_p)$ et $g(Z_{p+1}, \dots, Z_n)$ sont indépendantes, quelles que soient les applications f et g (Lemme des coalitions). De ce fait, les évènements A_p et $\big[|R_n - R_p| > 2x\big]$ sont indépendants et

$$\mathbf{P}\big(A_p \cap \big[|R_n - R_p| > 2x\big]\big) = \mathbf{P}(A_p)\,\mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x).$$

Soient $(u_p)_{1\leqslant p\leqslant n}$ et $(v_p)_{1\leqslant p\leqslant n}$, deux familles finies de réels positifs. *Comme la famille $(v_p)_{1\leqslant p\leqslant n}$ est finie, elle admet un plus grand élément et*

$$\forall\, 1 \leqslant p \leqslant n, \quad v_p \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} v_k.$$

Comme les u_p sont positifs, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant p \leqslant n, \quad u_p v_p \leqslant u_p \max_{1\leqslant k\leqslant n} v_k$$

et donc, en sommant sur p, que

$$\sum_{p=1}^{n} u_p v_p \leqslant \left(\sum_{p=1}^{n} u_p\right) \max_{1\leqslant k\leqslant n} v_k.$$

Ce petit raisonnement, très très très classique, étant rappelé, revenons à nos moutons.

On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &\leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(A_p)\,\mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x) \\
&\leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \left(\sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(A_p)\right) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_n - R_k| > 2x) \\
&\leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x)
\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_p) = \mathbf{P}(A) \leqslant 1$ (d'après la première question).

5. Par inégalité triangulaire, si $|R_n(\omega)| \leqslant x$ et $|R_p(\omega)| \leqslant x$, alors $|R_n(\omega) - R_p(\omega)| \leqslant 2x$. En passant au complémentaire, on en déduit que

$$\big[|R_n - R_p| > 2x\big] \subset \big[|R_n| > x\big] \cup \big[|R_p| > x\big]$$

et donc que

$$\mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| > x) + \mathbf{P}(|R_p| > x) \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_k| > x)$$

(le maximum est un majorant).

❧ Si $|R_n(\omega)| > x$, alors $|R_n(\omega)| \geqslant x$, donc

$$\forall\, 1 \leqslant p \leqslant n, \quad \mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x) \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_k| \geqslant x).$$

Le majorant est indépendant de p, on peut donc passer au maximum :

$$\max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbf{P}(|R_n - R_p| > 2x) \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_k| \geqslant x).$$

On a ainsi démontré que

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(|R_n| \geqslant x) + 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_k| \geqslant x) \leqslant 3 \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{P}(|R_k| \geqslant x).$$