Problème de Mathématiques

Référence pp1612 — Version du 31 décembre 2025

Soient Y et Z, deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que
$$\forall\, 0 \leqslant n < j, \quad \mathbf{P}(Y = j, Z = n) = 0$$
et que
$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad \mathbf{P}(Y = j, Z = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{n-j}}{j!(n-j)!}$$
où $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. a. Quelle est la loi (marginale) de Z ?

1. b. Quelle est la loi (marginale) de Y ?

1. c. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

1. d. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[Z = n]$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = Z - Y$.

3. Soient j et k, deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle
$$\mathbf{P}(Y = j \mid X = k).$$

4. En Syldavie du Nord, le nombre d'enfants par famille peut être modélisé par une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,2$. On a également observé que la répartition des deux sexes dans une fratrie de n enfants pouvait être modélisée par une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

4. a. Quel est le pourcentage de familles syldaves ayant i enfants dont j garçons ?

4. b. Quel est le pourcentage de familles syldaves n'ayant que des filles ?

Solution ❀ Couple de variables de Poisson

1. a. On déduit la loi de Z de la loi du couple (Y, Z) au moyen du système complet d'événements associé à la variable aléatoire discrète Y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = j, Z = n)\\ &= \lambda^n e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j (1-\alpha)^{n-j}}{j!(n-j)!}\\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}(1-\alpha)^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Big(\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big)^j\\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme. La variable Z suit donc la loi de Poisson de paramètre λ.

1. b. On procède de même avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire discrète Z. Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = j, Z = n)\\ &= \frac{e^{-\lambda}\alpha^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-\alpha)^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{e^{-\lambda\alpha}(\lambda\alpha)^j}{j!}\end{aligned}$$

d'après le développement en série entière de exp. La variable Y suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda\alpha$.

1. c. Comme Y et Z suivent des lois de Poisson, alors les probabilités $\mathbf{P}(Z = 0)$ et $\mathbf{P}(Y = 1)$ sont strictement positives, mais d'après la loi jointe,

$$\mathbf{P}(Y = 1, Z = 0) = 0 \neq \mathbf{P}(Y = 1)\,\mathbf{P}(Z = 0).$$

Les variables aléatoires Y et Z ne sont donc pas indépendantes.

1. d. On sait que $\mathbf{P}(Z = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On cherche donc à calculer

$$\mathbf{P}(Y = j \mid Z = n) = \frac{\mathbf{P}(Z = n, Y = j)}{\mathbf{P}(Z = n)}.$$

Si $j > n$, cette probabilité est nulle : on dit que la loi conditionnelle de Y sachant $[Z = n]$ est portée par $\{0, \dots, n\}$.

Si $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$\mathbf{P}(Y = j \mid Z = n) = \binom{n}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-j}$$

donc, conditionnellement à l'événement $[Z = n]$, la variable Y suit la loi binomiale de paramètres n et α.

2. Comme Y et Z sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors leur différence X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Mais $\mathbf{P}(Y \leqslant Z) = 1$ (d'après la loi conjointe de (Y, Z)), on peut donc considérer que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut décomposer l'événement $[X = k]$ au moyen du système complet d'événements associé à la variable discrète Y :

$$[X = k] = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} [Y = j, Z - Y = k] = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} [Y = j, Z = j + k].$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = j, Z = j + k)\\ &= e^{-\lambda(1-\alpha)} \frac{[\lambda(1-\alpha)]^k}{k!}\end{aligned}$$

donc X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-\alpha)$.
3. On sait que $\mathbf{P}(X=k)>0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ d'après la question précédente. De plus,

$$[X=k, Y=j]=[Y=j, Z-Y=k]=[Y=j, Z=j+k].$$

Comme $j+k\geqslant j$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Y=j \mid X=k)=e^{-\alpha\lambda}\frac{(\alpha\lambda)^j}{j!},$$

donc la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$ est la loi de Poisson de paramètre $(\lambda\alpha)$.
4. On modélise le nombre d'enfants par famille au moyen d'une variable aléatoire N qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, donc

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(N=n)=\mathbf{P}(Z=n).$$

Conditionnellement à l'événement $[N=n]$, le nombre de garçons G dans une famille est alors modélisé par une somme

$$B_1+\cdots+B_n$$

de variables indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Par conséquent, la loi conditionnelle de G sachant $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, donc

$$\forall\, 0\leqslant j\leqslant n,\quad \mathbf{P}(G=j \mid N=n)=\mathbf{P}(Y=j \mid Z=n).$$

On en déduit que, quels que soient les entiers $0\leqslant j\leqslant n$,

$$\mathbf{P}(G=j, N=n)=\mathbf{P}(G=j \mid N=n)\,\mathbf{P}(N=n)=\mathbf{P}(Y=j \mid Z=n)\,\mathbf{P}(Z=n)=\mathbf{P}(Y=j, Z=n).$$

La loi du couple (G, N) est donc égale à la loi du couple (Y, Z) étudié plus haut avec $\lambda=2,2$ et $\alpha=0,5$.
4. a. Il s'agit de calculer la probabilité pour que le couple (N, G) prenne la valeur (i, j), c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(Y=j, Z=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}.$$

4. b. Il s'agit de calculer la probabilité pour que $G=0$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(Y=0)=e^{-\lambda\alpha}=\exp(-1,1)\approx 33\%.$$