Problème de Mathématiques

Référence pp2025 — Version du 31 décembre 2025

Soient n, un entier naturel non nul et X et Y, deux variables aléatoires à valeurs entières, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et telles que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad 1 \leqslant X(\omega), Y(\omega) \leqslant n+1.$$

On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n+1, \quad \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Démontrer de deux manières différentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Déterminer la valeur de α.
3. Calculer les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire

$$Z = X - 1.$$

En déduire l'espérance et la variance de X.
5. Soient p, q et r, trois entiers naturels et A, un ensemble fini de cardinal $p+q$. *En dénombrant de deux façons différentes* les parties de A de cardinal r, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.
6. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

7. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, on pose

$$b_{i,j} = \mathbf{P}\big[(X, Y) = (i, j)\big]$$

et on considère la matrice

$$B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

7. a. Calculer le rang de la matrice B.
7. b. Calculer la trace de B.

Solution ❀ Un couple de v.a.

1. Première manière avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Deuxième manière, combinatoire (pour rester dans l'esprit du problème) :

— On considère un ensemble E de n éléments ;

— le cardinal k d'une partie de E est compris entre 0 (cas de l'ensemble vide) et n (cas de l'ensemble E, qui est une partie de lui-même) ;

— comme le cardinal de E est égal à n, on *sait* que, pour chaque entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k dans l'ensemble E ;

— le nombre total de parties de E est donc égal à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k};$$

— on *sait* par ailleurs que l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E est un ensemble de cardinal 2^n ;

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

La première version est incontestablement la plus simple et la plus rapide à rédiger. Quant à la deuxième version, on peut choisir celle qu'on veut... le tout est de la choisir vite et de la rédiger proprement. Et si on sèche, il vaut passer rapidement à la suite !

2. Puisque X et Y prennent leurs valeurs dans $\{1, \dots, n+1\}$, l'ensemble

$$\big([X = i, Y = j]\big)_{1 \leqslant i, j \leqslant n+1}$$

est un système complet d'événements et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = 1.$$

On déduit alors de la formule du binôme que

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \right) = \alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^2 = \alpha \cdot (2^n)^2$$

et par conséquent

$$\alpha = \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}.$$

Pour cette valeur de α, on a donc une famille finie de réels positifs dont la somme est égale à 1, il s'agit bien d'une loi de probabilité discrète et l'énoncé a donc un sens. (Il est toujours utile de s'en inquiéter...)

3. On connaît maintenant la loi conjointe de X et de Y et un simple calcul permet d'en déduire les lois marginales de X et de Y.

Comme

$$[X = i] = \bigsqcup_{j=1}^{n+1} [X = i, Y = j]$$

et que $\mathbf{P}$ est σ-additive,

$$\mathbf{P}(X = i) = \alpha \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{2^n}{2^{2n}} \binom{n}{i-1}.$$

On se rend compte facilement que le calcul est identique pour la loi de Y. On en déduit donc que X et Y suivent la même loi :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n+1, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

❧ On constate alors que

$$\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\mathbf{P}(X=i)\,\mathbf{P}(Y=j)$$

quels que soient les entiers $1\leqslant i,j\leqslant n+1$. Par conséquent, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans

$$\{1,2,\dots,n+1\},$$

il est clair que $Z=X-1$ est une variable aléatoire à valeurs dans

$$\{0,1,\dots,n\}.$$

En effet, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$1\leqslant X(\omega)\leqslant n+1 \iff 0\leqslant X(\omega)-1=Z(\omega)\leqslant n.$$

De plus, pour tout entier $0\leqslant k\leqslant n$,

$$Z(\omega)=k \iff X(\omega)=Z(\omega)+1=k+1$$

donc

$$\mathbf{P}(Z=k)=\mathbf{P}(X=k+1)=\binom{n}{(k+1)-1}\frac{1}{2^n}.$$

Comme

$$\forall\,0\leqslant k\leqslant n,\quad \mathbf{P}(Z=k)=\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k}$$

on en déduit que Z suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,1/2)$.

❧ On *sait* que

$$\mathbf{E}(Z)=n\cdot\frac{1}{2}\quad\text{et que}\quad \mathbf{V}(Z)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(1-\frac{1}{2}\Big).$$

Comme $X=Z+1$, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Z)+1=1+\frac{n}{2}$$

et comme $\mathbf{V}(aZ+b)=a^2\,\mathbf{V}(Z)$,

$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{V}(Z)=\frac{n}{4}.$$

5. Comme le cardinal de A est égal à $p+q$, le nombre de parties de A dont le cardinal est égal à r est égal à

$$\binom{p+q}{r}.$$

Imaginons que l'ensemble A soit constitué de p éléments bleus et de q éléments rouges. Toute partie P_r de A de cardinal r est alors composée d'un certain nombre k d'éléments bleus, les $(r-k)$ autres éléments de cette partie P_r étant nécessairement rouges.

Le nombre d'éléments bleus dans P_r est évidemment compris entre 0 (tous les éléments de P_r sont rouges) et p (tous les éléments bleus de A appartiennent à P_r et il peut bien sûr y avoir d'autres éléments, rouges bien entendu, dans P_r).

Il y a $\binom{p}{k}$ parties de cardinal k dans l'ensemble des éléments bleus de A et pour chacune de ces parties, il y a $\binom{q}{r-k}$ parties de cardinal $(r-k)$ dans l'ensemble des éléments rouges de A.

> *On utilise ici la convention habituelle*
>
> $$\forall\,j>i,\quad \binom{i}{j}=0$$
>
> *pour éviter des discussions interminables sur les valeurs comparées de k et de p, ainsi que sue les valeurs comparées de $(r-k)$ et de q.*

Pour chaque entier $0\leqslant k\leqslant r$, il y a donc

$$\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$$

parties de cardinal r constituées de k éléments bleus et de $(r-k)$ éléments rouges de A.

On en déduit qu'il y a

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

parties de cardinal r dans A.

Argument combinatoire très classique, à connaître !

6. Par symétrie des coefficients binomiaux, on sait que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

7. a. Comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n+1,j} \end{pmatrix} = \mathbf{P}(Y=j) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X=1) \\ \mathbf{P}(X=2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X=n+1) \end{pmatrix}$$

donc toutes les colonnes de B sont proportionnelles. Le rang de B est donc inférieur à 1.

Comme la somme des coefficients de B est égal à 1, la matrice B n'est pas la matrice nulle, donc son rang est au moins égal à 1.

$$\operatorname{rg} B = 1$$

7. b. Par définition,

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(X=i, Y=i) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}\binom{n}{i-1} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$