

Problème de Mathématiques

Référence pp2125 — Version du 31 décembre 2025

On modélise un jeu de Pile ou Face par une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$: l'événement $[B_n = 1]$ signifie qu'on a obtenu Pile lors du n -ième lancer.

On note X , le rang (aléatoire) d'apparition du premier Pile et Y , le rang (aléatoire) d'apparition du premier Face.

Par convention, si Pile n'apparaît jamais, on pose $X = 0$ et, symétriquement, si Face n'apparaît jamais, on pose $Y = 0$. De cette manière, X et Y sont des applications de Ω dans \mathbb{N} .

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $[X = n]$ et $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires B_k . En déduire que X et Y sont des variables aléatoires discrètes.

Reconnaitre la loi de X et celle de Y . On précisera leur espérance et leur variance.

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la loi de la variable aléatoire XY , ainsi que l'espérance de cette variable.
4. Calculer la covariance de X et Y . En déduire que $\mathbf{V}(X + Y) = 2$.
5. Démontrer que les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ ont même loi.

Solution ❁ Jeu de Pile ou Face

1. Par convention,

$$[X = 0] = \bigcap_{n \geq 1} [B_n = 0] \quad \text{et} \quad [Y = 0] = \bigcap_{n \geq 1} [B_n = 1].$$

Pour $n \geq 1$,

$$[X = n] = [B_1 = \dots = B_{n-1} = 0] \cap [B_n = 1]$$

et symétriquement

$$[Y = n] = [B_1 = \dots = B_{n-1} = 1] \cap [B_n = 0].$$

Comme les B_k sont des variables aléatoires, on sait que $[B_k = 0]$ et $[B_k = 1]$ appartiennent à la tribu \mathcal{A} pour tout $k \geq 1$. Une tribu étant stable par intersection finie ou dénombrable, on déduit de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [X = n] \in \mathcal{A}$$

et donc que X est bien une variable aléatoire. Idem pour Y bien sûr.

Comme les variables aléatoires B_k sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$,

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}.$$

Donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$, d'espérance 2 (l'inverse du paramètre) et de variance 2 ($=q/p^2$). Idem pour Y .

2. On a démontré que $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = 1) = 1/2$. Mais

$$[X = 1] = [B_1 = 1] \quad \text{et} \quad [Y = 1] = [B_1 = 0],$$

donc les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont disjoints et de ce fait

$$\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 1) \mathbf{P}(Y = 1).$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

3. On a remarqué à la question précédente que

$$([X = 1], [Y = 1]) = ([B_1 = 1], [B_1 = 0])$$

était un système complet d'événements. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} [XY = n] &= [XY = n, X = 1] \sqcup [XY = n, Y = 1] \\ &= [X = 1, Y = n] \sqcup [X = n, Y = 1]. \end{aligned}$$

❁ Pour $n = 1$, on a déjà remarqué que

$$[X = 1, Y = 1] = \emptyset$$

et donc $\mathbf{P}(XY = 1) = 0$.

❁ Pour $n = 0$ ou $n \geq 2$, on a

$$[X = 1, Y = n] = [Y = n]$$

puisque, pour tout $n \neq 1$,

$$[Y = n] \subset [B_1 = 1] = [X = 1].$$

De même, $[X = n, Y = 1] = [X = n]$ et donc

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{P}(XY = n) = 2\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

avec

$$\mathbf{P}(XY = 0) = 2\mathbf{P}(X = 0) = 0.$$

❁ Comme $[XY = n] = [XY - 1 = n - 1]$, on déduit de ce qui précède que $XY - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$ et donc que

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(XY - 1) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

4. D'après la Formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) = 3 - 2 \times 2 = -1.$$

On sait que

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

5. *Question piège!* On a constaté que $([X = 1], [Y = 1])$ était un système complet d'événements.

- Si $X(\omega) = 1$, alors $X(\omega) + Y(\omega) = 1 + Y(\omega)$ cependant que $X(\omega)Y(\omega) + 1 = 1 + Y(\omega)$;
- Si $Y(\omega) = 1$, alors $X(\omega) + Y(\omega) = 1 + X(\omega)$ cependant que $X(\omega)Y(\omega) + 1 = 1 + X(\omega)$.

Donc en fait, et malgré les apparences, les variables aléatoires $X + Y$ et $XY + 1$ sont égales (en tant qu'applications de Ω dans \mathbb{N}) et par conséquent, elles ont même loi : la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$.